

Unter *chaotischen Bewegungen* versteht man andauernde, irregulär oszillierende Schwankungen von Zustandsgrößen in deterministischen Systemen mit starker Empfindlichkeit gegenüber Änderungen der Anfangsbedingungen. Man kann sie den deterministischen nichtperiodischen, nichttransienten Schwingungen zuordnen. Wegen der hohen Empfindlichkeit gegenüber kleinsten Änderungen in den Anfangsbedingungen lässt sich der zeitliche Verlauf derartiger Bewegungen nicht mehr vorhersagen, obwohl die zugrunde liegenden Systeme deterministischer Natur sind. Der *Zeitverlauf* ähnelt einem Einschwingvorgang mit unendlich langer Dauer oder auch dem Verlauf stochastischer Schwingungen.

Chaotische Bewegungen können in vergleichsweise einfachen nichtlinearen Systemen auftreten. Bereits ein nichtlineares System 3. Ordnung kann sich chaotisch verhalten. Demnach genügt ein nichtlinearer Schwinger mit einem Freiheitsgrad und expliziter Zeitabhängigkeit, wie sie durch eine Parametererregung oder eine Fremderregung gegeben ist, um chaotische Bewegungen zu bekommen. Wenn man anstelle der zeitkontinuierlichen auf eine zeitdiskrete Beschreibung übergeht, führt bereits eine nichtlineare eindimensionale Differenzengleichung oder eindimensionale Abbildung auf chaotisches Verhalten, wie in Abschn. 8.1 gezeigt wird. Freilich tritt chaotisches Verhalten nur bei bestimmten Systemparametern auf, die im allgemeinen nicht von vornherein bekannt sind. Deshalb geht die Untersuchung chaotischer Bewegungen mit numerischen oder experimentellen Parameterstudien einher. Dabei sind Indikatoren zum Erkennen chaotischer Bewegungen erforderlich. Häufig zeigt das Verhalten der Systemantwort bei Änderung einzelner Parameter charakteristische Wege ins Chaos auf.

Über deterministisches Chaos gibt es eine reichhaltige Fachliteratur, vgl. [GH02, Moo04, TS02, StK89, LKP94, Kre87, Bel95]. Mit den folgenden Ausführungen soll exemplarisch ein Einblick in das Phänomen Chaos gegeben werden. Wir beschränken uns dabei auf diejenigen nichtlinearen Schwinger, die aus bisherigen Betrachtungen bereits bekannt sind. Zunächst sollen zeitdiskrete und anschließend zeitkontinuierliche Systeme untersucht werden.

8.1 Zeitdiskrete Systeme

Einfache zeitdiskrete Systeme lassen sich in der Form

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu) \quad (8.1)$$

darstellen. Dabei kennzeichnen f eine im Allgemeinen nichtlineare Funktion, μ einen Parameter und $x_n = x(t_n)$ die abhängige Variable zu festen Zeitpunkten t_n , die das n -fache eines konstanten Zeitinkrements Δt bilden: $t_n = n\Delta t$, $\Delta t = \text{const}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Mit Hilfe von (8.1) wird ein Wert x_n auf x_{n+1} abgebildet, (8.1) heißt deshalb *diskrete Abbildung oder Punkt-Abbildung*. Ausgehend von einem Anfangswert x_0 lässt sich die Entwicklung der abhängigen Variablen durch rekursive Anwendung von (8.1) verfolgen. Dies soll an einem einfachen und besonders instruktiven Beispiel gezeigt werden.

8.1.1 Die logistische Abbildung

Betrachtet man das Wachstum einer Population y in der Zeit Δt , so lässt sich dafür der einleuchtende Ansatz $\Delta y \approx ky\Delta t$ angeben, wobei $k > 0$ die Wachstumsrate ist. Bildet man den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$, so erhält man die zeitkontinuierliche Darstellung $\dot{y} = ky$, die mit der Anfangsbedingung $y(t = 0) = y_0$ auf das exponentielle Wachstumsgesetz $y(t) = y_0 \exp(kt)$ führt. Ein Beispiel dazu: Im Jahr 1987 betrug die Weltbevölkerung 5 Mrd. Menschen und die Wachstumsrate $k = 0,019/\text{Jahr}$; im Jahr $1987 + T$ beträgt die Weltbevölkerung bei *exponentiellem Wachstum* $y(T) = 5 \cdot 10^9 \exp(0,019 \cdot T)$. Daraus folgt eine Verdopplung der Weltbevölkerung nach $T = 36,5$ Jahren!

Nimmt man an, dass die Wachstumsrate nicht konstant ist, sondern mit zunehmender Population abnimmt bis sie bei maximaler Population $y_{\max}$ verschwindet, $k = \alpha(y_{\max} - y)$, so erhält man die *logistische Wachstumsgleichung* $\dot{y} = \alpha(y_{\max} - y)y$. Eine Differentialgleichung dieses Typs hatten wir bereits in Abschn. 3.2.4 kennen gelernt. Normiert man diese Beziehung, so folgt mit $z = y/y_{\max}$, $\beta = \alpha y_{\max}$

$$\dot{z} = \beta z(1 - z). \quad (8.2)$$

Geht man unter Verwendung von $\dot{z} \approx \Delta z / \Delta t = (z_{n+1} - z_n) / \Delta t$, $\Delta t = 1$, zur entsprechenden Differenzengleichung über, so ergibt sich

$$z_{n+1} = (\beta + 1)z_n - \beta z_n^2. \quad (8.3)$$

Mit der Transformation $z_n = x_n(\beta + 1)/\beta$ und $\mu = \beta + 1$ folgt schließlich die *logistische Abbildung*

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) = f(x_n, \mu) \quad (8.4)$$

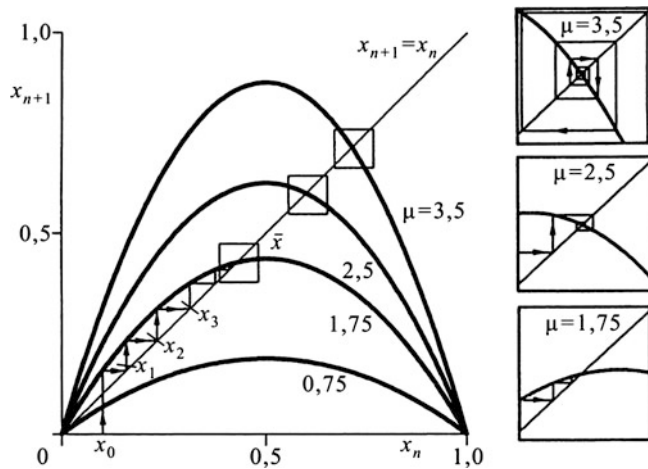


Abb. 8.1 Graph der logistischen Abbildung in $x_{n+1} = \mu x(1 - x_n)$ und Konvergenzverhalten abhängig von β

Abb. 8.1 zeigt den Graph der Abbildung (8.4) in der x_{n+1}, x_n -Ebene. Es liegt eine quadratische Parabel mit Nullstellen bei $x_n = 0$ und $x_n = 1$ sowie einem Maximum bei $x_n = 1/2, x_{n+1} = \mu/4$ vor. Für Parameterwerte $0 < \mu \leq 4$ stellt (8.4) eine Abbildung des x_n -Intervalls $[0, 1]$ auf das x_{n+1} -Intervall $[0, 1]$ dar. Beginnt man mit x_0 im Inneren des Abszissen-Intervalls, so lässt sich die durch (8.4) festgelegte Folge $x_1, x_2, x_3, \dots$ in einfacher Weise berechnen und auf grafischem Wege veranschaulichen: Das Lot in x_0 schneidet die Parabel im Ordinatenwert x_1 . Die horizontale Projektion von x_1 schneidet die Diagonale $x_{n+1} = x_n$ in einem neuen Abszissenwert, dessen Lot die Parabel im Ordinatenwert x_2 schneidet, usw. Die jeweiligen Schnittpunkte mit der Parabel kennzeichnen die Folge $x_1, x_2, x_3, \dots$ der Iterationswerte. Diese diskrete Punktfolge wird auch *Trajektorie* oder *Orbit* genannt. Ein *Fixpunkt* $\bar{x}$ der Iteration ist erreicht, wenn $x_{n+1} = x_n = \bar{x}$ gilt. Grafisch ist $\bar{x}$ durch den Schnittpunkt der Diagonale mit der Parabel gegeben. Wichtig ist die *Stabilität* des Fixpunktes. Sie lässt sich wie folgt durch die Steigung $f'(\bar{x})$ der Parabel im Fixpunkt kennzeichnen:

- Wenn $|f'(\bar{x})| < 1$ gilt, ist der Fixpunkt stabil; die Iteration konvergiert, d. h. sie läuft auf den Fixpunkt zu und kommt dort zum Stillstand, vgl. Abb. 8.1, $\mu = 1,75$ oder $\mu = 2,5$. Ein stabiler Fixpunkt zieht gewissermaßen die Trajektorie an, man nennt ihn deshalb auch *Attraktor*.
- Wenn $|f'(\bar{x})| > 1$ gilt, ist der Fixpunkt instabil, die Iteration kommt nicht zum Stillstand, d. h. sie divergiert, vgl. Abb. 8.1, $\mu = 3,5$. Ein instabiler Fixpunkt stößt die Trajektorie ab.

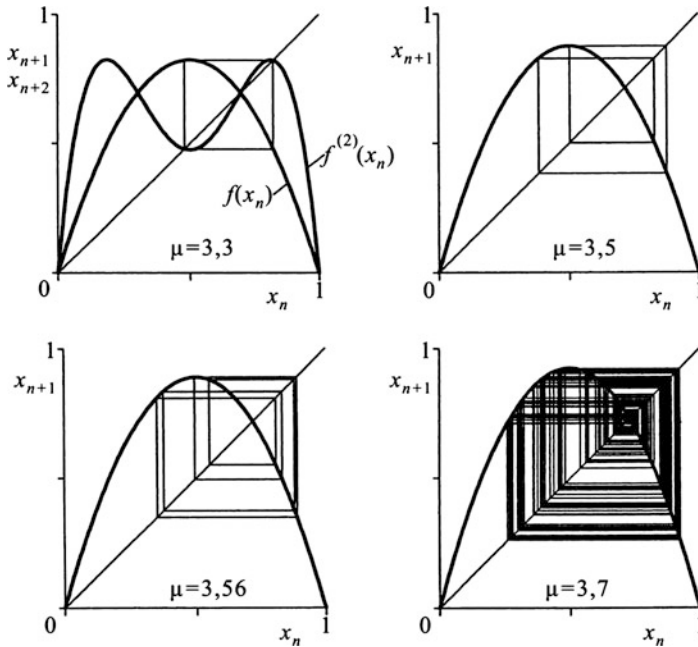


Abb. 8.2 Verhalten der logistischen Abbildung $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ für $n > 100$ und verschiedene Werte von μ

Für bestimmte Parameter μ können periodische Lösungen auftreten. Aus (8.4) folgt allgemein $x_{n+2} = f(x_{n+1}) = f(f(x_n)) = f^{(2)}(x_n)$. Man nennt die zweimalige Anwendung der Abbildung auch zweite Iterierte $f^{(2)}(x_n)$. Sie ist in Abb. 8.2 für $\mu = 3,3$ zusammen mit der ersten Iterierten aufgetragen. Eine p -periodische Lösung ist allgemein durch die Fixpunkte der p -ten Iterierten

$$x_{n+p} = f^{(p)}(x_n) = x_n \quad (8.5)$$

gegeben. Die Stabilität dieser Fixpunkte wird wie im oben beschriebenen Fall $p = 1$ anhand der Steigung der Iterierten in den Fixpunkten beurteilt. Für die logistische Abbildung ergibt sich abhängig vom Parameter μ , für große Werte n das in Abb. 8.2 gezeigte und in Tab. 8.1 beschriebene Verhalten (vgl. hierzu [LKP94]).

Die möglichen Lösungen sind in Abhängigkeit von μ in Abb. 8.3 aufgetragen. Man nennt diese Darstellung *Verzweigungs-* oder *Bifurkationsdiagramm*. Bei Erhöhung von μ über $\mu = 3$ hinaus wird die 1-periodische Lösung instabil und verzweigt sich zu einer stabilen 2-periodischen Lösung. Bei weiterer Erhöhung von μ verzweigt sich das System in immer rascherer Folge zu 2^k -periodischen stabilen Lösungen, wobei die jeweils vorangehenden Lösungen instabil werden. Für $\mu > 3,5699$ treten keine stabilen 2^k -periodischen

Tab. 8.1 Lösungsverhalten

Parameterwert	Lösungsverhalten
$0 < \mu \leq 1$	$\bar{x} = 0$ stabil
$1 < \mu \leq 3$	$\bar{x} = 0$ instabil Lösung $p = 1$ mit $\bar{x} = 1 - \frac{1}{\mu}$ stabil
$3 < \mu \leq 3,5699$	Lösung $p = 2^{k-1}$ instabil $k = 1, 2, 3, \dots$ Lösung $p = 2^k$ stabil
$\mu > 3,5699$	Lösung im allg. chaotisch

Lösungen auf. Man befindet sich jetzt im chaotischen Bereich, in dem so genannte metastabile Lösungen oder *periodische Fenster* auftreten können. Für $\mu = 3,84$ ergibt sich beispielsweise eine stabile 3-periodische Lösung, vgl. Abb. 8.3b. Für die logistische Abbildung lassen sich die Verzweigungspunkte explizit berechnen, vgl. [LKP94].

Bei Erhöhung von μ im Bereich $3 \leq \mu \leq 3,5699$ tritt eine Kaskade von Verzweigungen auf, deren jede zu einer Verdoppelung der Periodenzahl in den Lösungen führt. Diese *Periodenverdoppelung* im Verzweigungsverhalten ist ein typischer Weg zum Chaos, den man in vielen Anwendungsbeispielen findet. Der Grund dafür liegt in der Universalität dieses Phänomens. Betrachtet man die Folge $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\infty$ der Verzweigungspunkte, so nimmt die Länge l_k der zwischen ihnen liegenden Parameterintervalle, in denen 2^k -periodische Lösungen auftreten, rasch ab. Jedes Folgeintervall ist um den Faktor $1/\delta$ kleiner als das vorherige, wobei

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{l_{k-1}}{l_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_k - \mu_{k-1}}{\mu_{k+1} - \mu_k} = 4,6692$$

(8.6)

gilt. Dieser Zahlenwert δ wurde von Grossmann und Thomas 1977 angegeben. Feigenbaum [Fei78], sowie Coullet und Tresser [CoT78] wiesen 1978 die Universalität von δ für diskrete dynamische Systeme nach. Die Zahl δ wird seither als *Feigenbaumkonstante* bezeichnet. Mit Hilfe der Größen δ , μ_1 und l_1 lässt sich ein Näherungswert $\tilde{\mu}_\infty$ für die

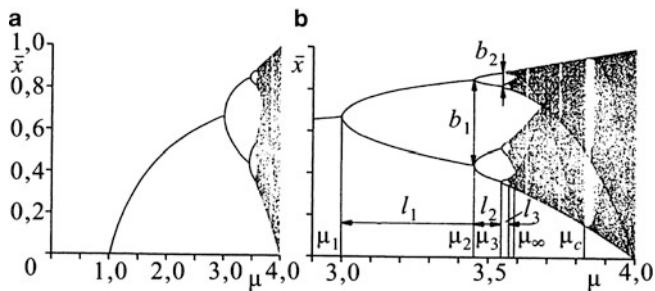
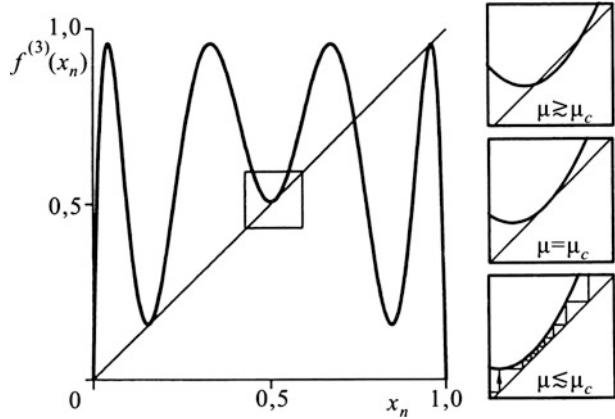


Abb. 8.3 Verzweigungsdiagramm für die logistische Abbildung

Abb. 8.4 Veranschaulichung der Entstehung der Intermittenz anhand der logistischen Abbildung für $\mu \approx \mu_c = 3,8284$



Grenze zum chaotischen Bereich finden

$$\tilde{\mu}_\infty - \mu_1 = \sum_{j=1}^{\infty} l_k = l_1 \frac{1}{\delta} + l_1 + l_1 \left(\frac{1}{\delta} \right)^2 + l_1 \left(\frac{1}{\delta} \right)^3 + \dots = l_1 \frac{\delta}{\delta - 1}, \quad (8.7)$$

$$\tilde{\mu}_\infty = \mu_1 + 1,2725 l_1.$$

Angewendet auf die logistische Abbildung mit $\mu_1 = 3$, $l_1 = \sqrt{6} - 2$ folgt $\tilde{\mu}_\infty = 3,5720$, also eine sehr gute Näherung für den exakten Wert $\mu_\infty = 3,5699$.

Ähnlich wie die Intervalllängen l_k bilden auch die Breiten b_k der Amplitudengabelungen eine geometrische Folge mit

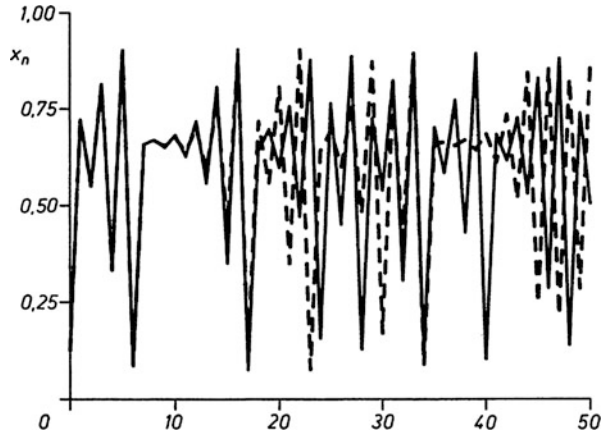
$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{k-1}}{b_k} = 2,5029 \quad (8.8)$$

wobei α ebenfalls eine universelle Konstante ist.

Einen weiteren universellen Weg ins Chaos ist die so genannte *Intermittenz*. Dieses Phänomen finden wir bei der logistischen Abbildung beispielsweise im Fenster mit der 3-periodischen Lösung für μ -Werte geringfügig kleiner als der kritische Wert $\mu_c = 1 + \sqrt{8} \approx 3,8284$, vgl. Abb. 8.3. Die 3-periodische Lösung folgt aus den Fixpunkten der dritten Iterierten $f^{(3)}(x_n)$, die in Abb. 8.4 dargestellt ist. Für μ -Werte geringfügig größer als μ_c ergeben sich drei stabile Fixpunkte. Verkleinert man den μ -Wert, so berührt die dritte Iterierte die Diagonale für $\mu = \mu_c$, wobei stabile und instabile Fixpunkte zusammenfallen (Sattelpunkt- oder Tangentenverzweigung). Bei weiterer Verkleinerung von μ , $\mu \lesssim \mu_c$, bildet sich ein schmaler Kanal zwischen der dritten Iterierten und der Diagonale aus, in dem die Iterationsfolge verweilt und sich die Lösungen nur wenig ändern. Verlässt die Iterationsfolge den Kanal, so treten große Schwankungen der Lösungswerte auf, bis die Iterationsfolge erneut in den Kanal einmündet. Das Lösungsverhalten in Abhängigkeit der Zahl n der Iterationen weist reguläre (laminare) Phasen auf, die von irregulären Ausbrüchen (bursts) unterbrochen werden, vgl. dazu auch Abb. 8.24d.

Abb. 8.5 Iterationsfolgen der logistischen für $\mu = 3,7$ bei geringfügig verschiedenen Anfangswerten:

$x_0 = 0,3000$ —————,
 $x_0 = 0,3001$ - - - - -



Die starke Empfindlichkeit der chaotischen Lösungen gegenüber Änderungen der Anfangsbedingungen zeigt Abb. 8.5 anhand von zwei Iterationsfolgen mit geringfügig unterschiedlichen Anfangswerten.

Ein Maß für die exponentielle Konvergenz oder Divergenz benachbarter Lösungen bilden die *Ljapunov-Exponenten*. Sie sind verallgemeinerte Stabilitätsmaße und charakterisieren das mittlere asymptotische Lösungsverhalten. Im Fall eindimensionaler Punktabbildungen $x_{n+1} = f(x_n)$ existiert ein Ljapunov-Exponent Λ , der sich aus dem Mittelwert der Steigungen in den Punkten einer Iterationsfolge oder Trajektorie ergibt,

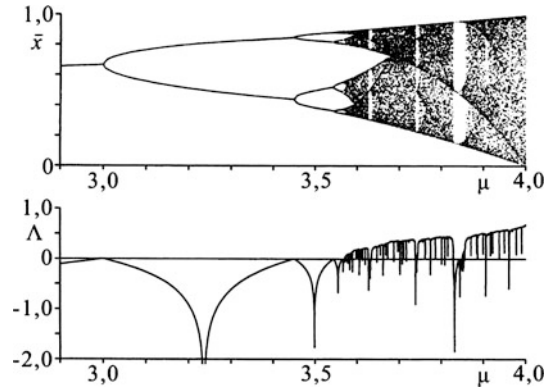
$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \ln |f'(x_n)|. \quad (8.9)$$

Wie wir bereits gesehen haben, gilt für stabile Fixpunkte oder allgemein für stabile p -periodische Lösungen $|f'(x_n)| < 1$. Damit folgt aus (8.9) unmittelbar $\Lambda < 0$. Umgekehrt folgt aus $\Lambda > 0$, dass die Iterationsfolge im Mittel divergiert, d. h. sie verhält sich chaotisch. Anhand des Ljapunov-Exponenten sind deshalb die folgenden Aussagen möglich:

- $\Lambda < 0$, die Trajektorie ist stabil und periodisch,
- $\Lambda = 0$, die Trajektorie ist grenzstabil,
- $\Lambda > 0$, die Trajektorie ist chaotisch.

Abb. 8.6 zeigt das *Verzweigungsdiagramm* für die logistische Abbildung und den zugehörigen Verlauf des Ljapunov-Exponenten in Abhängigkeit des Verzweigungsparameters μ . Beide Diagramme lassen sich einander eindeutig zuordnen. Für periodische Lösungen gilt $\Lambda < 0$, während chaotische Lösungen durch $\Lambda > 0$ gekennzeichnet sind. Für die Verzweigungspunkte μ_k gilt $\Lambda = \Lambda_k = 0$, weil für $\mu = \mu_k$ die Stabilität der Lösungen verloren geht und $|f'(x_n)| = 1$ gilt. In den Bereichen periodischer Lösungen kann der

Abb. 8.6 Verzweigungsdiagramm und Verlauf des Ljapunov-Exponenten Λ für die logistische Abbildung



Ljapunov-Exponent sehr große negative Werte annehmen, $\Lambda \rightarrow -\infty$. Dies ist für Trajektorien der Fall, die den Wert $x_n = 1/2$ enthalten, weil dort das Maximum des Graphen der Abbildung liegt und somit die Steigung verschwindet: $f'(x_n = 1/2) = 0$. Man nennt diese *Trajektorien superstabil*.

Die vielfältigen Eigenschaften der logistischen Abbildung findet man auch bei anderen Punktabbildungen wieder. Wichtig ist dabei das Vorhandensein eines ausgeprägten Maximums im Graph der Abbildung.

8.1.2 Konzept und Anwendung der Poincaré-Abbildung

Am Beispiel eines einfachen zeitdiskreten dynamischen Systems, der logistischen Abbildung, haben wir gesehen, welche vielfältigen Phänomene auftreten können und welche Analysemöglichkeiten es gibt. Nun stellt sich die Frage, wie man für konkrete Schwingungssysteme zu solchen Abbildungen kommt. Der Einfachheit halber betrachten wir allgemeine schwingungsfähige Systeme mit einem Freiheitsgrad und harmonischer Fremderregung. Ihre Bewegungsgleichung lautet in normierter Form

$$x'' + f(x, x') = x_0 \cos \eta \tau. \quad (8.10)$$

Darin sind $\tau = \omega_0 t$ die Eigenzeit und $\eta = \Omega/\omega_0$ das Frequenzverhältnis von Erregerkreisfrequenz Ω und Bezugskreisfrequenz ω_0 . Durch (8.10) können sowohl nichtlineare erzwungene Schwingungen als auch selbsterregte Schwingungen mit gleichzeitiger Fremderregung gekennzeichnet werden. Anwendungsbeispiele finden sich in den Kap. 3 und 5. Überführt man (8.10) in die Form eines autonomen Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung, so folgt mit $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = \eta \tau$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -f(x_1, x_2) + x_0 \cos x_3, \\ x_3' &= \eta. \end{aligned} \quad (8.11)$$

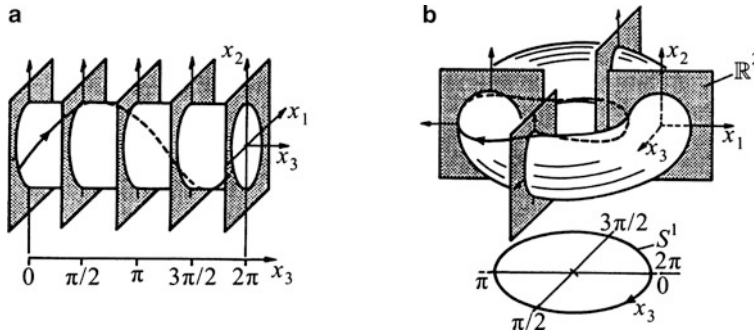


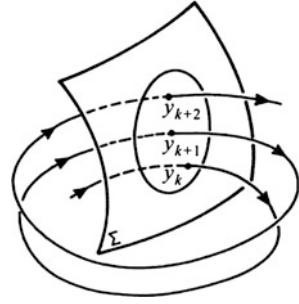
Abb. 8.7 Darstellung der Lösung im Phasenraum **a** kartesisch **b** zylindrisch

Solche Systeme 3. Ordnung können chaotisches Lösungsverhalten aufweisen. Die Lösungstrajektorien verlaufen in einem 3-dimensionalen *Phasen- oder Zustandsraum*, vgl. Abb. 8.7a. Da die Koordinate $x_3 = \eta\tau$ in (8.10), (8.11) nur als Argument der Cosinusfunktion auftritt, kann man sich auf Werte $0 \leq x_3 \leq 2\pi$ beschränken. Dies bedeutet, dass sich die Lösung in einem ringförmigen Phasenraum darstellen lässt, vgl. Abb. 8.7b. Man bezeichnet diesen *Phasenraum* als kartesisches Produkt $\mathbb{R}^2 \times S^1$ der Ebene $\mathbb{R}^2$ der reellen Zahlen mit einem Kreis S^1 . Im Sonderfall des linearen fremderregten Schwingers (5.25) ist die Lösung im eingeschwungenen Zustand durch (5.27) gegeben. Eine spezielle zugehörige Lösungstrajektorie ist in Abb. 8.7 eingetragen. Sie weist dieselbe Periode wie die Erregung auf und verläuft auf einem Zylinder (Abb. 8.7a) bzw. auf einem Torus (Abb. 8.7b).

Eine zeitdiskrete Darstellung lässt sich gewinnen, wenn man die Lösungstrajektorie im Phasenraum nur in bestimmten Zeitabständen $\tau_k = \tau_0 + k\Delta\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots$, betrachtet. Der Verlauf der Trajektorie zwischen diesen Zeitpunkten interessiert dabei nicht. Man nennt dies eine *stroboskopische Abbildung*, weil man die Trajektorie in einem bestimmten Zeittakt „anblitzt“ und nur diese Information verwendet. Bei autonomen Systemen kann die Diskretisierungszeit $\Delta\tau$ beliebig gewählt werden. Bei nichtautonomen Systemen wie z. B. (8.10) wählt man zweckmäßig $\Delta\tau = 2\pi/\eta$ oder $\Delta x_3 = 2\pi$. Dann wird stets nur der Punkt der Trajektorie nach einem vollen Umlauf auf dem Torus herausgegriffen.

Die *Poincaré-Abbildung* ist eine spezielle Art der stroboskopischen Betrachtung. Um sie zu erhalten, legt man in den Phasenraum der Dimension N eine lokale Schnittfläche Σ der Dimension $N-1$, die von den Trajektorien transversal geschnitten wird, vgl. Abb. 8.8. Kennzeichnet man die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte der Trajektorien auf Σ durch den Koordinatenvektor y_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, so lässt sich damit die Poincaré-Abbildung P definieren: $\Sigma \rightarrow \Sigma$, $y_{k+1} = P(y_k)$. Der Vorteil dieser speziellen Punktabbildung ist, dass die Dimension des Darstellungsraumes Σ um eins niedriger ist als die des Phasenraumes. Im Sonderfall des 3-dimensionalen Phasenraumes, vgl. Abb. 8.7b, lassen sich als Schnittflächen Σ_i beispielsweise die Ebenen senkrecht zu den Achsen der Koordinaten x_i wählen, vgl. Abb. 8.9. Die Ebene Σ_3 entspricht einem Poincaré-Schnitt mit

Abb. 8.8 Veranschaulichung der Poincaré-Abbildung



$x_3 = \eta\tau = \text{const}$, modulo 2π . Dies entspricht einer stroboskopischen Betrachtung der Trajektorien im Takte der Periodendauer $\Delta\tau = 2\pi/\eta$ der Erregung. Die zugehörige 2-dimensionale Punktabbildung lautet mit $x = x_1$, $x' = x_2$

$$x_{k+1} = P_1(x_k, x'_k), \quad x'_{k+1} = P_2(x_k, x'_k). \quad (8.12)$$

Ein Fixpunkt der 2-dimensionalen Punktabbildung ist gegeben, wenn $x_{k+1} = x_k = \bar{x}$, $x'_{k+1} = x'_k = \bar{x}'$ gilt. In ausgezeichneten Fällen, wenn z. B. $x'_k = P(x_k)$ gilt, lässt sich aus (8.12) eine eindimensionale Punktabbildung gewinnen

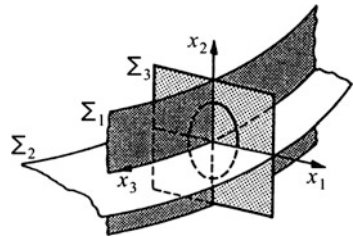
$$x_{k+1} = P_1[x_k, P(x_k)] = f(x_k). \quad (8.13)$$

Von besonderem Interesse sind die Poincaré-Schnitte Σ_1 und Σ_2 . Für σ_1 gilt $x_1 = x = 0$; die Durchstoßpunkte der Trajektorien kennzeichnen die Nulldurchgänge der Schwingungen. Für Σ_2 hingegen gilt $x_2 = x' = 0$, die Durchstoßpunkte charakterisieren verschwindende Geschwindigkeiten, also je nach Durchstoßrichtung maximale oder minimale Schwingungsausschläge. Beide Vorgehensweisen sind Beispiele für die Berücksichtigung besonderer Schwingungsmerkmale in der Poincaré-Abbildung. Dafür lassen sich in Sonderfällen eindimensionale Abbildungen für die Phase $\varphi \equiv x_3 = \eta\tau$ finden,

$$\varphi_{k+1} = f(\varphi_k) \pmod{2\pi}. \quad (8.14)$$

Lässt sich (8.14) auf die Form $\varphi_{k+1} = \varphi_k + f(\varphi_k) \pmod{2\pi}$ bringen, dann spricht man von einer *Kreisabbildung*.

Abb. 8.9 Poincaré-Schnitte im 3-dimensionalen Phasenraum



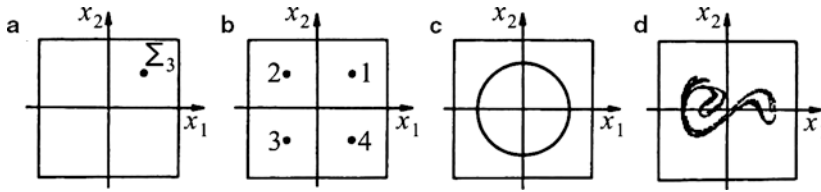


Abb. 8.10 Poincaré-Abbildung für einen fremderregten Schwinger, der **a** periodisches, **b** subharmonisches, **c** quasiperiodisches und **d** chaotisches Lösungsverhalten zeigt

Anhand der Poincaré-Abbildung lässt sich das Lösungsverhalten in einfacher Weise charakterisieren. Davon macht man bei numerischen und experimentellen Untersuchungen ausgiebig Gebrauch. Betrachtet man beispielsweise einen fremderregten Schwinger der Form (8.10) und die Poincaré-Ebene Σ_3 mit $x_3 = \eta\tau = \Omega t = \text{const}$, $0 \leq x_3 \leq 2\pi$, so kennzeichnen die Durchstoßpunkte der Trajektorien im eingeschwungenen Zustand die Lösungen wie folgt, vgl. Abb. 8.10:

- Periodische Lösungen* mit derselben Periode $T = 2\pi/\Omega$ wie die Erregung ergeben einen *Punkt*.
- Subharmonische Lösungen* (Unterschwingungen) mit der Periode $T = 2\pi n/\Omega$ ergeben *n Punkte*.
- Quasiperiodische oder fastperiodische Lösungen*, deren Periode in keinem rationalen Verhältnis zur Erregerperiode steht, ergeben eine *geschlossene Kurve*.
- Chaotische Lösungen* ergeben einen *Punkthaufen* mit komplexer Feinstruktur und *fraktaler Dimension* d , $1 < d < 2$, d. h. einer Dimension zwischen der einer Linie und einer Fläche.

Allgemeine Bewegungen, die wie im Fall linearer erzwungener Schwingungen auf einem Torus verlaufen, lassen sich durch die *Windungszahl* w kennzeichnen. Darunter versteht man das Verhältnis der Kreisfrequenz ω_a der Schwingungsantwort zur Erregerkreisfrequenz Ω im eingeschwungenen Zustand,

$$w = \frac{\omega_a}{\Omega}. \quad (8.15)$$

Die Windungszahl kennzeichnet anschaulich die Anzahl der Windungen der Lösungstrajektorie um die kleine Querschnittsfläche des Torus bezogen auf eine Windung entlang des großen Torusumfangs. Dabei gilt:

- Ist w *rational*, so treffen die Trajektorien nach einer endlichen Anzahl von Umläufen am Torusumfang aufeinander, d. h. die Bewegung ist *periodisch*.
- Ist w *irrational*, so treffen die Trajektorien nicht aufeinander, sondern bedecken für $t \rightarrow \infty$ die gesamte Oberfläche des Torus; die Bewegung heißt dann *quasiperiodisch* oder *fastperiodisch*.

In der Poincaré-Abbildung lassen sich Windungszahlen oder Frequenzverhältnisse, die um eine ganze Zahl voneinander abweichen, nicht unterscheiden. Deshalb kann man sich auf den Dezimalanteil $\bar{w}$ von $w(\bar{w} - w \pmod{1})$ beschränken. Somit ist es nicht möglich, periodische Schwingungen mit $\omega_a = n\Omega/m$ für $n > m$ (Ober-Unterschwingungen, vgl. Abschn. 5.4.4) aus der Poincaré-Abbildung eindeutig zu erkennen. Beispielsweise erscheinen alle Oberschwingungen mit $\omega_A = n\Omega$, $n = 2, 3, \dots$, in der Poincaré-Abbildung wie die Grundschiwingung $\omega_A = \Omega$ als ein Punkt. Der Kehrwert der Windungszahl lässt sich auch für Abbildungen der Form (8.14) angeben

$$w^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_k - \varphi_0}{2\pi k}. \quad (8.16)$$

Die Größe w^* kennzeichnet das Verhältnis Ω/ω_A von Erreger- zu Antwortkreisfrequenz im eingeschwungenen Zustand.

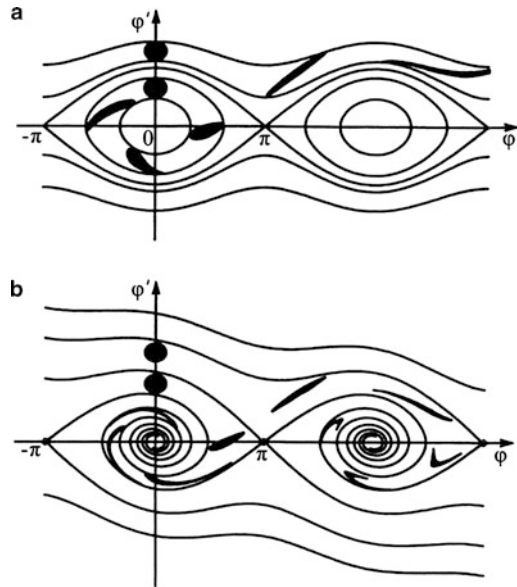
8.2 Zeitkontinuierliche Systeme

Zeitkontinuierliche Schwingungssysteme lassen sich allgemein durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (8.17)$$

beschreiben. Darin kennzeichnen $\mathbf{f}$ eine nichtlineare vektorwertige Funktion, μ einen Parametervektor, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$ den Vektor der abhängigen Veränderlichen und t die Zeit. Bei *autonomen Schwingungssystemen* mit n Freiheitsgraden ist die Dimension des Phasen- oder Zustandsraums $N = 2n$. *Heteronome Schwingungssysteme* mit Fremd- oder Parametererregung lassen sich ebenfalls auf die Form (8.17) bringen, vgl. dazu (8.11). Bei n Freiheitsgraden und einer periodisch zeitabhängigen Funktion gilt dann $N = 2n + 1$. Alle kontinuierlichen Schwingungssysteme, die wir bisher kennen gelernt haben, lassen sich somit auf die Form (8.17) bringen. Ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal, das bereits zu Beginn von Kapitel 2 eingeführt wurde, bezieht sich auf den Energiehaushalt. Bleibt die mechanische Gesamtenergie $E_k + E_p$ während der Bewegung erhalten, so ist das Schwingungssystem *konservativ*, geht hingegen mechanische Energie verloren, so ist das System *dissipativ*. Infolge der Energieerhaltung bleibt bei einem konservativen System der Form (8.17) das Volumen eines im Phasenraum gebildeten Volumenelements im Laufe der Zeit erhalten, vgl. Abb. 8.11a, während es bei einem dissipativen System schrumpft, Abb. 8.11b. Diese beiden Fälle sollen im folgenden getrennt behandelt werden.

Abb. 8.11 Entwicklung eines kreisförmigen Gebiets von Anfangsbedingungen in der Phasenebene am Beispiel des Schwerpendels mit der Differentialgleichung $\varphi'' + 2D\varphi' + \sin \varphi = 0$: **a** konservativ $D = 0$, **b** dissipativ $D = 0,05$



8.2.1 Konservative Systeme

In Abschn. 2.1 wurden konservative nichtlineare Schwinger mit einem Freiheitsgrad untersucht. Es treten stets reguläre Bewegungen auf, die sich abhängig von den Anfangsbedingungen und damit vom Energieniveau in der Phasenebene als Phasenportrait darstellen lassen, vgl. Abb. 2.18, 2.19, 2.26 und 2.27. Geschlossene Phasenkurven kennzeichnen periodische Schwingungen, deren Schwingungsdauer in Integralform angegeben werden kann, vgl. (2.59), (2.60).

Konservative nichtlineare Schwingungssysteme mit n Freiheitsgraden können unter bestimmten Bedingungen, wenn das zugehörige Hamiltonsche System *integrierbar* ist, auf n voneinander entkoppelte Oszillatoren zurückgeführt und durch die Trajektorien auf einem n -dimensionalen Torus im $2n$ -dimensionalen Phasenraum gekennzeichnet werden, vgl. [Kre87].

Der Torus, dessen Abmessungen von den Anfangsbedingungen und damit vom Energieniveau abhängt, wird als invarianter Torus bezeichnet, weil eine Trajektorie, die auf einem Torus beginnt, stets auf diesem Torus bleibt.

Die Bewegung auf dem Torus lässt sich durch die Winkelvariablen $\varphi_i(t) = \omega_i t + \varphi_{i0}$, $\omega_i = \text{const}$, eindeutig beschreiben. Im Sonderfall $n = 2$ kann der in einem anderen Zusammenhang eingeführte Torus von Abb. 8.7b zur Veranschaulichung dienen. Analog

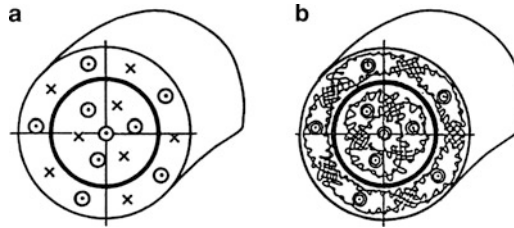
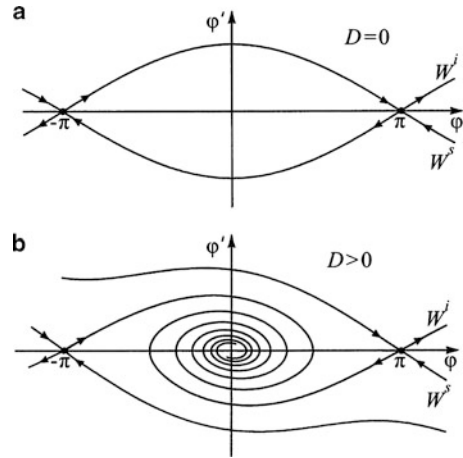


Abb. 8.12 Poincaré-Abbildung für einen konservativen Schwinger mit $n = 1$ Freiheitsgraden: **a** Struktur der Tori mit stabilen ($\odot$) und instabilen ($\times$) Fixpunkten, **b** Lösungsverhalten in der Nähe der Fixpunkte nach [AMJ08]

zu (8.15) kann eine Windungszahl $w = \omega_1/\omega_2$ angegeben werden, die jetzt das Verhältnis der beiden Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 kennzeichnet und Aufschluss über periodische Lösungen (w rational) sowie *quasi- oder fastperiodische* Lösungen (w irrational) gibt.

Die Darstellung der Bewegungen eines konservativen Schwingungssystems auf einem Torus gilt nur eingeschränkt, da – wie [Pon57], gezeigt hat – viele dynamische Systeme, z. B. das klassische Dreikörperproblem in der Himmelsmechanik, nichtintegrierbar sind und ein kompliziertes, im allgemeinen irreguläres Bewegungsverhalten aufweisen. Um auch für *nicht-integrierbare* konservative Systeme Aussagen zu bekommen, kann man die *kanonische Störungstheorie* anwenden. Dazu geht man von einem integrierbaren System und der zugehörigen Bewegung auf einem Torus aus und nimmt eine kleine nichtintegrierbare Energiestörung (Erregung, Dämpfung) an. Die Trajektorien des gestörten, nichtintegrierbaren Systems bleiben für längere Zeit in der Nähe der ungestörten Trajektorie auf dem Torus, wenn die Störungen klein sind. Dies wurde basierend auf einer Vermutung von Kolmogorov (1954) durch Arnold (1963) und Moser (1962) bewiesen. Die Ergebnisse sind in der so genannten *KAM-Theorie* zusammengefasst worden, vgl. [Kre87]. Wir beschränken uns im folgenden auf konservative Systeme mit $n = 2$ Freiheitsgraden. Dafür kann das Verhalten der Trajektorien durch eine zweidimensionale Poincaré-Abbildung charakterisiert werden, indem man beispielsweise die Schnittpunkte des Torus mit der Ebene $\varphi_i = \text{const}$ betrachtet. Damit ergeben sich Verhältnisse ähnlich wie sie in Abb. 8.9 bei Verwendung der Schnittebene Σ_3 dargestellt sind. Im allgemeinen gibt es mehrere Energieniveaus, die auf invariante Tori als Ausgangspunkt der Betrachtung führen. Aufgrund der KAM-Theorie bleiben bei kleinen Störungen die Tori mit irrationaler Windungszahl in leicht deformierter Form bestehen, während die Tori mit rationaler Windungszahl in eine gerade Anzahl von Fixpunkten zerfallen. Dabei wechseln sich elliptische Punkte (Wirbelpunkte) und hyperbolische Punkte (Sattelpunkte) ab, ähnlich wie beim Schwebpendel, vgl. Abb. 2.19 oder Abb. 8.11a. Die zugehörigen gestörten Trajektorien sind zwischen zwei benachbarten Tori gefangen, vgl. Abb. 8.12. Die Trajektorien in der Nähe elliptischer Punkte sind stabil, sie verlaufen auf kleinen Tori, für die wieder die KAM-Theorie gilt; sie sind selbstähnlich. Die Trajektorien in der Nähe hyperbolischer Punkte sind instabil, sie zeigen einen verwickelten Verlauf, auf den im nächsten Abschnitt noch näher eingegangen wird. Insgesamt ergibt sich ein chaotisches Verhalten.

Abb. 8.13 Sattelpunkttrajektorien eines ebenen Schwerependels mit stabilen und instabilen Ästen W^s bzw. W^i **a** konservativ **b** dissipativ



Rein konservative Schwingungssysteme treten bei technischen Anwendungen nicht auf, da immer Energiedissipation vorhanden ist. Gestörte konservative Systeme mit äußerer Erregung und Dämpfung sind hingegen von großer Bedeutung. Deshalb sollen die gestörten Lösungen in der Nähe von hyperbolischen Punkten näher betrachtet werden. Sie zeigen einen weiteren allgemeinen Weg zu chaotischen Bewegungen auf. Die Ergebnisse lassen sich zudem unmittelbar auf technische Schwingungssysteme übertragen.

8.2.2 Homokline Punkte und die Methode von Melnikov

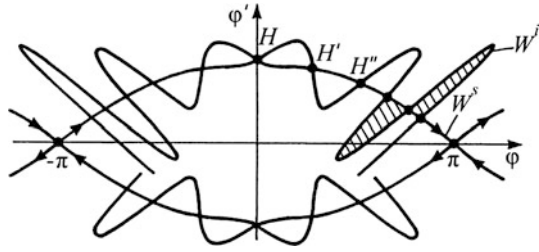
Wir betrachten die Sattelpunkttrajektorien des ebenen Schwerependels von Abb. 8.11. Berücksichtigt man, dass die Sattelpunkte $\bar{\varphi} = +\pi$ und $\bar{\varphi} = -\pi$ dieselbe instabile Gleichgewichtslage kennzeichnen, so genügt die Betrachtung des Bereichs $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Wir unterscheiden die beiden stabilen Äste W^s der Sattelpunkttrajektorie, die zum Sattelpunkt hinlaufen, und die beiden instabilen Äste W^i , die von ihm weglaufen, vgl. Abb. 8.13. Stört man nun das schwach gedämpfte Schwerependel durch Hinzufügen einer harmonischen Fremderregung mit kleiner Amplitude $\hat{\varphi} \ll 1$, so lautet die beschreibende Differentialgleichung in normierter Form

$$\varphi'' + 2D\varphi' + \sin \varphi = \hat{\varphi} \sin \eta\tau. \quad (8.18)$$

Mit $\varphi = x_1$, $\varphi' = x_2$, $\eta\tau = x_3$ folgt daraus ein System der Form (8.11)

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -\sin x_1 - 2Dx_2 + \hat{\varphi} \sin x_3, \\ x_3' &= \eta. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Abb. 8.14 Poincaré-Abbildung für das gestörte ebene Schwebependel mit homoklinen Punkten H



Mit Vergrößerung der Erregeramplitude $\hat{\varphi}$ kann es zunächst zu einer Berührung und anschließend zum transversalen Schnitt eines stabilen und eines instabilen Astes der Sattelpunkttrajektorien kommen. Ein solcher Schnittpunkt H , von dem aus man asymptotisch mit zunehmender oder abnehmender Zeit zur selben instabilen Gleichgewichtslage kommt, heißt *homokliner Punkt* (gehören die Sattelpunkte zu unterschiedlichen Gleichgewichtslagen, so spricht man von einem heteroklinen Punkt).

Die Verhältnisse lassen sich in der Poincaré-Ebene Σ_3 mit $x_3 = \text{const}$ veranschaulichen, wenn man die Entwicklung von Linienelementen in der Nähe der Sattelpunkte im Takte der Erregung verfolgt, vgl. Abb. 8.14. Man kann zeigen, dass ein homokliner Punkt H unendlich viele homokline Punkte $H', H'', \dots$ zur Folge hat, weil die Iterierten der Poincaré-Abbildung eines homoklinen Punktes sowohl auf einem stabilen Ast W^s als auch auf einem instabilen Ast W^i liegen müssen. Die Folge dieser Punkte heißt *homokliner Orbit*. Bei Annäherung an den Sattelpunkt werden die Abstände zwischen den Iterierten immer kleiner. Wegen der Gleichheit der in Abb. 8.14 gekennzeichneten Flächen werden gleichzeitig die Oszillationen immer größer. In der Nähe des Sattelpunktes windet sich der instabile Ast in komplizierter Weise um den stabilen. Als Folge erhält man im allgemeinen chaotische Bewegungen. Die Existenz homokliner Punkte ist jedoch nur eine notwendige und keine hinreichende Bedingung für andauerndes chaotisches Verhalten, denn das komplizierte Bewegungsverhalten kann von endlicher Dauer sein (transientes Chaos). Das hier am Beispiel des durch Fremderregung gestörten Schwebependels gezeigte Verhalten tritt in gleicher Weise auch bei einer Störung durch Parametererregung auf, vgl. dazu [LKP94, Tro82].

Die *Melnikov-Methode* ist ein Verfahren der Störungsrechnung, vgl. [GH02, LKP94]. Mit Hilfe der so genannten Melnikov-Funktion ist es möglich, für schwach gestörte Systeme auf analytischem Wege den Abstand zwischen den Ästen W^s und W^i der Sattelpunkttrajektorie zu bestimmen. Die Nullstelle dieser Funktion erlaubt eine Abschätzung der Systemparameter, für die homokline Punkte H existieren, als deren Folge Chaos auftreten kann. In Tab. 8.2 finden sich einige Beispiele mit den zugehörigen Abschätzungen der Störparameter f_1, γ bzw. f für das Auftreten homokliner Punkte. Dabei sind durchweg nur kleine Abweichungen vom konservativen Grundsystem angenommen worden.

Tab. 8.2 Parameterabschätzungen

Beispiel mit Differentialgleichung	Parameterabschätzung nach Melnikov	Quelle
Magnetisches Pendel $\ddot{\varphi} + \delta\dot{\varphi} + \sin \varphi = f_1 \cos \varphi \cos \Omega t + f_0$	$f_1 \left \frac{4\delta}{\pi} - f_0 \right \frac{\cosh(\pi\Omega/2)}{\Omega^2}$	[Moo04]
Parametererregtes Pendel $\ddot{\varphi} + \delta\dot{\varphi} + (1 + \gamma \cos \Omega t) \sin \varphi = 0$	$\gamma > \frac{4\delta}{\pi\Omega^2} \sinh(\pi\Omega/2)$	[LKP94]
Schwinger mit quadratisch nichtlinearer Fesselung $\ddot{x} + \delta\dot{x} + x - x^2 = f \sin \Omega t$	$f > \frac{\delta}{5\pi\Omega^2} \sinh(\pi\Omega)$	[TS02]
Schwinger mit kubisch nichtlinearer Fesselung (Duffing-Schwinger)		
$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = f \cos \Omega t$	$f > \frac{2\sqrt{2}\delta}{3\pi\Omega} \cosh(\pi\Omega/2)$	[GH02]
$\ddot{x} + \delta\dot{x} - \beta x + \gamma x^3 = f \cos \Omega t$	$f > \frac{2\sqrt{2}\delta}{3\pi\Omega\sqrt{\gamma}} \cosh\left(\pi\Omega / \left(2\sqrt{\beta}\right)\right)$	[StK89]

8.2.3 Dissipative Systeme und Attraktoren

Die in der technischen Praxis vorkommenden dynamischen Systeme sind wegen der immer vorhandenen Dämpfung dissipativ. Als wichtige Konsequenz folgt, dass ein im Phasenraum gebildetes Volumen im Laufe der Zeit schrumpft, vgl. Abb. 8.11b, und schließlich asymptotisch verschwindet. Durch (8.17) wird im Phasenraum $\mathbb{R}^N$ ein Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ definiert, das wegen $\dot{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{v}$ als Geschwindigkeitsfeld des so genannten Phasenflusses angesehen werden kann. Die *Volumenänderungsrate* eines aus Anfangsbedingungen gebildeten Volumens V lautet

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})}{\partial x_i}. \quad (8.20)$$

Damit folgt aus dem Anfangsvolumen $V(0)$ das Volumen $V(t)$ zum Zeitpunkt t

$$V(t) = V(0) \exp[t \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})]. \quad (8.21)$$

Für das System (8.19) ergibt sich beispielsweise die Volumenänderungsrate $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = -2D$. Damit ist für $D > 0$ die Volumenkontraktion im gesamten Phasenraum gleich groß.

Die Trajektorien eines dissipativen Systems streben für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch auf *Attraktoren* zu, deren Dimension kleiner als N ist und verbleiben dort. Attraktoren haben wir bereits bei zeitdiskreten Systemen als stabile Fixpunkte von Punktabbildungen und ihren Iterierten kennen gelernt. Dem entsprechen bei zeitkontinuierlichen Systemen asymptotisch stabile Gleichgewichtslagen und stabile Grenzzykeln, die ebenfalls bereits bekannt sind.

Allgemein versteht man unter einem Attraktor A eine kompakte asymptotische Grenzmenge mit folgenden *Eigenschaften* (zur mathematischen Begründung vgl. [Kre87]):

- 1) Eine *Trajektorie*, die sich in A befindet, bleibt in A (Invarianz).
- 2) A hat eine offene Umgebung, in der sich die *Trajektorien* auf A zusammenziehen (Attraktivität).
- 3) Die *Trajektorien* in A sind wiederkehrend, d. h. kein Teil von A ist transient (Rekurrenz).
- 4) A ist nicht weiter in Teilmengen mit gleichen Eigenschaften zerlegbar (Nichtreduzierbarkeit).

Bei nichtlinearen dissipativen Systemen können gleichzeitig mehrere Attraktoren existieren. Dann laufen die Trajektorien abhängig von den Anfangsbedingungen auf unterschiedliche Attraktoren zu. Demgemäß unterscheidet man die *Einzugsbereiche* der Attraktoren als diejenigen Bereiche der Anfangsbedingungen im Phasenraum, von denen aus die Trajektorien auf die einzelnen Attraktoren zulaufen. Neben Fixpunkten und Grenzzykeln kennt man Torus-Attraktoren sowie chaotische oder seltsame *Attraktoren*. Ein Attraktor wird als seltsam bezeichnet, wenn die zugehörigen Trajektorien besonders empfindlich auf Änderungen der Anfangsbedingungen reagieren. Die sonstigen Eigenschaften 1) bis 4) bleiben jedoch erhalten, auch wenn kleine zufällige Störungen vorhanden sind. Dies ist wichtig für das experimentelle oder numerische Auffinden von Attraktoren.

Die Trajektorien auf *Torus-Attraktoren* sind quasi- oder fastperiodische Lösungen, während zu den seltsamen Attraktoren chaotische Bewegungen gehören. Die Attraktoren ändern sich in Abhängigkeit der Systemparameter, ähnlich wie wir es bei zeitdiskreten Systemen kennengelernt haben. Die Kenntnis der Attraktoren und ihrer Einzugsgebiete ist für Anwendungen überaus wichtig, deshalb soll im folgenden Abschnitt auf die Charakterisierung der Attraktoren und der zugehörigen Trajektorien eingegangen werden.

8.2.4 Merkmale regulärer und chaotischer Bewegungen

Die Analyseverfahren lassen sich grob in zwei Gruppen einteilen:

- *modellgestützte* und
- *signalgestützte* Methoden.

Der ersten Gruppe liegt das mathematische Modell eines dynamischen Systems zugrunde. Sind die dabei auftretenden Funktionen hinreichend glatt, so lassen sich die klassischen *analytischen Verfahren* wie Störungsrechnung und Mittelungsmethoden (Galerkin-Verfahren, Verfahren der langsam veränderlichen Amplitude) zur Untersuchung regulärer Lösungen heranziehen. Diese Verfahren sind jedoch untauglich zur Analyse chaotischer Bewegungen. Außerdem gewinnen zunehmend nichtlineare Phänomene wie Reibung, Spiel, Stöße und Hysterese an Interesse. Sie führen auf nichtglatte Funktionen,

die eine analytische Vorgehensweise erschweren. In vielen Fällen ist man deshalb auf *numerische Simulationen* angewiesen, die für unterschiedliche Anfangsbedingungen sowie für verschiedene Parametersätze durchzuführen und über längere Zeiträume zu erstrecken sind, um die gewünschten Erkenntnisse zu gewinnen.

Die zweite Gruppe geht von experimentell ermittelten Messsignalen aus. Infolge unvermeidlicher Messfehler sind die Ausgangsdaten ungenau, so dass bei der *Analyse experimenteller Zeitreihen* besondere Vorkehrungen getroffen werden müssen. So ist es beispielsweise eine nichttriviale Aufgabe, aus einem stochastisch verrauschten Zeitverlauf auf eine mögliche chaotische Bewegung zu schließen. Auf die signalgestützten Verfahren soll hier nicht näher eingegangen werden, vgl. dazu [LKP94] und [Moo04].

Geht man von numerischen Simulationen auf der Basis des mathematischen Modells (8.17) aus, so erscheint die Betrachtung der *Zeitverläufe* einzelner Koordinaten des Phasenraums geeignet, um zwischen regulärem und chaotischem Verhalten zu unterscheiden. Jedoch selbst nach langen Simulationszeiten kann man nicht sicher sein, ob eine irregulär oszillierende Trajektorie zu einer chaotischen Bewegung oder zu einer regulären Bewegung mit großer Periode oder langem Einschwingvorgang gehört. Gleiches gilt für die entsprechenden *Phasenkurven oder Poincaré-Abbildungen*.

Eine weitere Möglichkeit zur Analyse besteht in der Fouriertransformation der ermittelten Zeitverläufe und der Darstellung als Leistungsspektrum. Die *Fourier-Transformierte* $X(\omega)$ eines Zeitverlaufs $x(t)$ ist durch

$$X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (8.22)$$

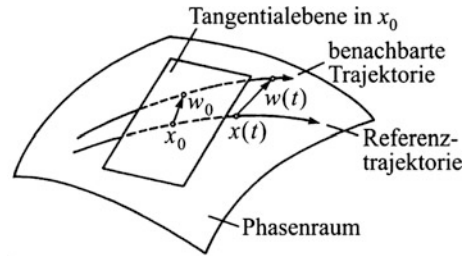
gegeben. Daraus folgt das *Leistungsspektrum* $R(\omega)$ zu

$$R(\omega) = |X(\omega)|^2. \quad (8.23)$$

Bei einer periodischen oder fastperiodischen Trajektorie erhält man ein Linienspektrum, bei dem die Höhe der einzelnen Linien die Intensität der jeweiligen Frequenz kennzeichnet. Bei einer chaotischen Bewegung hingegen enthält das Leistungsspektrum kontinuierliche Anteile sowie einzelne Linien, welche die hauptsächlich vertretenen Frequenzanteile kennzeichnen. Kontinuierliche Leistungsspektren ergeben sich jedoch auch für stochastische Signale und Zeitverläufe von Einschwingvorgängen. Bei der Bildung der Leistungsspektren ist deshalb auf hinreichend lange, stationäre Zeitverläufe zu achten. Verrauschte Messsignale erfordern darüber hinaus noch eine Filterung.

Im Falle von Verzweigungen ergeben sich besonders deutliche Änderungen im Leistungsspektrum. Bei der Verzweigung einer periodischen Lösung durch eine Kaskade von Periodenverdopplungen treten im Leistungsspektrum Subharmonische auf. Hat die Grundharmonische die Kreisfrequenz ω_0 , so folgt bei der $(k + l)$ -ten Verzweigung eine Subharmonische mit der Kreisfrequenz $\omega_0/2^k$. Das Verhältnis der Intensitäten aufeinander-

Abb. 8.15 Beschreibung von Referenztrajektorie und benachbarter Trajektorie zur Berechnung der eindimensionalen Ljapunov-Exponenten



derfolgender Subharmonischer nimmt ebenfalls ab; es gilt $R_{k+1}/R_k - (1/2\alpha)^2$ mit der universellen Konstanten $\alpha = 2,5029$ (vgl. [Kre87]).

Das wichtigste Kriterium zur Unterscheidung regulärer und chaotischer Trajektorien und der entsprechenden Attraktoren sind bei zeitkontinuierlichen wie bei zeitdiskreten Systemen die bereits erwähnten *Ljapunov-Exponenten*. Sie stellen ein Maß für die zeitlich gemittelte Konvergenz oder Divergenz benachbarter Trajektorien dar. Man unterscheidet mehrdimensionale und eindimensionale Ljapunov-Exponenten.

Bei den *mehrdimensionalen* Ljapunov-Exponenten Λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, betrachtet man die mittlere zeitliche Entwicklung eines n -dimensionalen Volumenelements im n -dimensionalen Phasenraum, wobei $1 \leq n \leq N$ gilt. Für $n = N$ beträgt der zeitliche Verlauf des Volumens V im Mittel

$$V(t) = V(0) \exp[t \cdot (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots + \Lambda_N)]. \quad (8.24)$$

Vergleicht man diese Beziehung mit (8.21), so folgt

$$\sum_{i=1}^N \Lambda_i = \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}). \quad (8.25)$$

Daraus folgt, dass bei einem dissipativen System die Summe der Ljapunov-Exponenten immer negativ sein muss. (8.25) kann gleichzeitig zu Kontrollzwecken herangezogen werden. Man kann zeigen, dass für Bewegungen auf einem Attraktor, der nicht Fixpunkt ist, immer einer der Ljapunov-Exponenten verschwindet. Der verschwindende Ljapunov-Exponent gehört zur Richtung tangential zur Trajektorie auf dem Attraktor. Bei einem chaotischen Attraktor müssen zudem die Trajektorien in mindestens einer Richtung im Mittel divergieren, es muss also ein positiver Ljapunov-Exponent existieren. Insgesamt zeigt dies, dass chaotische Attraktoren einen Phasenraum mit der Dimension $N \geq 3$ erfordern.

Bei den *eindimensionalen* Ljapunov-Exponenten wird die zeitliche Entwicklung des Abstandes einer Trajektorie von einer benachbarten Referenztrajektorie betrachtet, wobei das System (8.17) zugrunde gelegt wird, vgl. Abb. 8.15. Zum Zeitpunkt t_0 ist der Ort auf der Referenztrajektorie durch $\mathbf{x}_0$ und der benachbarte Ort durch $\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0$ gegeben. Wenn der Abstandsvektor $\Delta \mathbf{x}$ klein ist, so kann er durch den Vektor $\mathbf{w}$ in der Tangentialebene

angenähert werden. Die zeitliche Entwicklung von $\mathbf{w}$ lässt sich durch die linearisierte Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = D\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\mu}] \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0 \quad (8.26)$$

beschreiben mit der *Funktional-* oder *Jacobimatrix*

$$D\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\mu}] = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_N \\ \partial f_N / \partial x_1 & \partial f_N / \partial x_N \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}. \quad (8.27)$$

Damit wird der eindimensionale Ljapunov-Exponent als Grenzwert der mittleren zeitlichen Entwicklung der logarithmierten Entfernung der Trajektorien definiert

$$\Lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{t} \ln \frac{\|\mathbf{w}(t)\|}{\|\mathbf{w}_0\|} \right], \quad (8.28)$$

wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm bezeichnet.

Der Ljapunov-Exponent hängt demnach von $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{w}_0$ ab. Wegen der Linearität von (8.26) existiert eine orthonormale Basis $\mathbf{e}_i(x)$, $i = 1, \dots, N$, in die $\mathbf{w}_0$ projiziert werden kann, so dass (8.28) für jedes $\mathbf{x}_0$ bis zu N verschiedene Werte $\Lambda_i(\mathbf{x}_0) \equiv \Lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}_i)$ annehmen kann. Die Ljapunov-Exponenten werden der Größe nach geordnet und indiziert

$$\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_N. \quad (8.29)$$

Bei beliebiger Wahl von $\mathbf{w}_0$ lässt sich mit der Zerlegung $\mathbf{w}_0 = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{e}_i$, $c_i \neq 0$ zeigen, dass der Grenzwert (8.28) dem Maximalwert Λ_i zustrebt.

Betrachtet man anstelle von (8.17) das lineare zeitinvariante N -dimensionale System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (8.30)$$

so wird die exponentielle Konvergenz oder Divergenz durch die Realteile der Eigenwerte λ_i von $\mathbf{A}$ beschrieben. Somit gilt

$$\Lambda_i = \operatorname{Re}(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.31)$$

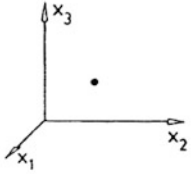
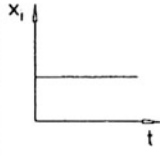
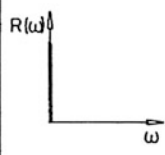
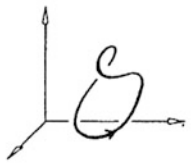
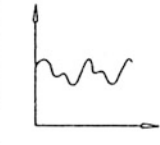
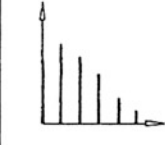
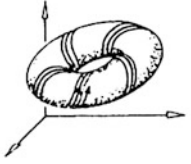
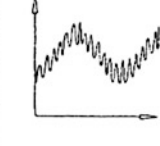
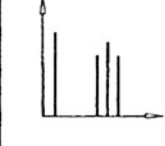
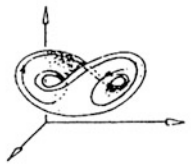
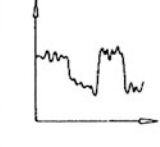
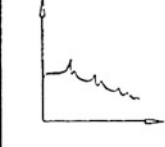
Bei einem linearen, periodisch zeitvariablen System der Form (8.30) mit $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+T)$ gilt hingegen

$$\Lambda_i = \frac{1}{T} \ln |\sigma_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8.32)$$

wobei σ_i die Eigenwerte der Transitionsmatrix $\Phi(T)$ sind, die man durch Integration der Matrixdifferentialgleichung

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = \mathbf{E} \quad (8.33)$$

Tab. 8.3 Charakteristische Merkmale von Attraktoren

Attraktor im Phasenraum	Zeitverlauf	Leistungsspektrum	Ljapunov - Exp. $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3$	Dimension des Attraktors
Fixpunkt (PunkATTRAKTOR) 			- - -	0
Grenzykel (periodischer Attraktor) 			0 - -	1
Grenztorus (quasiperiodischer Attraktor) 			0 0 -	2
Seltsamer oder chaotischer Attraktor 			+ 0 -	$2 < d < 3$

über eine Periode gewinnt. Man erkennt, dass die Ljapunov-Exponenten generalisierte Stabilitätsmaße sind. Zur Berechnung der Ljapunov-Exponenten für den allgemeinen, durch (8.17) beschriebenen Fall gibt es mehrere Algorithmen, die von [GPL90] beschrieben und miteinander verglichen wurden.

Eine weitere wichtige Größe zur Unterscheidung von regulären und chaotischen Bewegungen in dissipativen Systemen ist die *Dimension des Attraktors*. Es gibt eine Reihe von Definitionen für den Begriff der Dimension, vgl. [LKP94]. Allen ist gemeinsam, dass Fixpunkte, Grenzyklen und Torus-Attraktoren die Dimension $d = 0$, $d = 1$ bzw. $d = 2$ haben. Unterschiede treten jedoch bei der Dimension chaotischer Attraktoren auf. Infolge des komplizierten Gefüges auf beliebig kleinen Skalen spricht man von einer fraktalen Struktur bzw. einer *fraktalen Dimension* des Attraktors, wobei im allgemeinen $2 < d < 3$ gilt. Eine Abschätzung der Dimension eines Attraktors kann mit Hilfe der Ljapunov-Exponenten über die *Ljapunov-Dimension* D_L angegeben werden,

$$d \leq D_L = k + \frac{\sum_{i=1}^k \Lambda_i}{|\Lambda_{k+1}|}. \quad (8.34)$$

Dabei ist k die größte ganze Zahl, für die $\sum_{i=1}^k \Lambda_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{k+1} \Lambda_i < 0$ gilt. Für $\Lambda_1 < 0$ gilt somit $d = D_L = 0$.

Die charakteristischen Merkmale von Attraktoren sind nach [Kre87] für dreidimensionale dissipative Systeme in Tab. 8.3 zusammengestellt. Für die zugehörigen Poincaré-Abbildungen entfällt jeweils der Ljapunov-Exponent vom Wert Null, beim Fixpunkt entfällt ein negativer Ljapunov-Exponent und die Dimension verringert sich um Eins.

8.3 Beispiele

Abschließend soll an zwei Beispielen die Vielfalt der Phänomene in nichtlinearen dynamischen Systemen demonstriert und die Wege ins Chaos veranschaulicht werden. Dies sind als wichtigste Übergänge Periodenverdopplung und Intermittenz, die wir bereits bei diskreten Systemen kennen gelernt haben. Im zeitkontinuierlichen Fall treten diese Übergänge mit den in Abschn. 8.1.1 beschriebenen Merkmalen unverändert auf. Im ersten Beispiel wird ein Reibungsschwinger mit unstetiger Reibkennlinie behandelt. Dies ist gleichzeitig ein Beispiel für ein *nichtglattes dynamisches System*, für das eine Beschreibung als zeitdiskretes System und eine anschauliche grafische Analyse möglich ist. Das zweite Beispiel betrifft den Duffing-Schwinger als zeitkontinuierliches System. Da das reguläre Verhalten des Duffing-Schwingers aus Abschn. 5.4.3 bekannt ist, steht hier das chaotische Verhalten im Vordergrund.

Abb. 8.16 Mechanisches Modell eines Reibungsschwingers mit Fremderregung

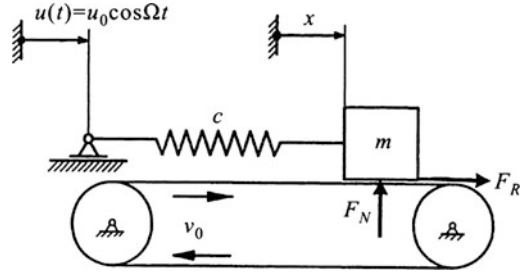
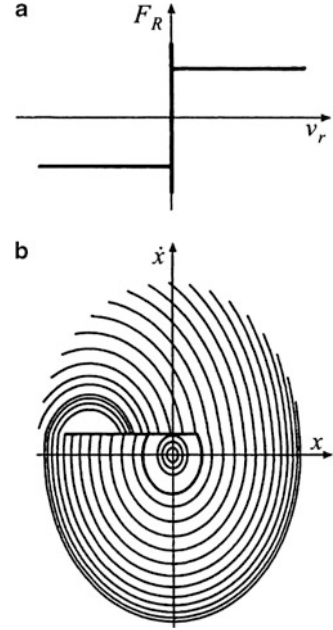


Abb. 8.17 **a** Reibungskennlinie, **b** Phasenportrait des Reibungsschwingers ohne Fremderregung



8.3.1 Der Reibungsschwinger mit Fremderregung

Betrachtet wird das in Abb. 8.16 dargestellte einfache mechanische Modell eines Reibungsschwingers mit Fremderregung. Es besteht aus der Masse m , die durch eine Feder mit der Federkonstante c gefesselt und durch ein umlaufendes Band mit der Geschwindigkeit v_0 angetrieben wird. Zwischen Band und Masse herrscht trockene Reibung mit der in Abb. 8.17a dargestellten Kennlinie, wobei die Reibungskraft $F_R = \mu(v_r)F_N$ von der Relativgeschwindigkeit $v_r = v_0 - \dot{x}$ und der Normalkraft $F_N > 0$ abhängt. Der Federfußpunkt wird gemäß $u(t) = u_0 \cos \Omega t$ harmonisch fremderregt mit der Erregeramplitude u_0 und der Erregerkreisfrequenz Ω . Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x}(t) + cx(t) = F_R(v_r) + cu_0 \cos \Omega t. \quad (8.35)$$

Während der Gleitphase ($v_r \neq 0$) ist F_R eine eingeprägte Kraft. Sie ergibt sich mit der Gleitreibungszahl μ zu

$$F_R = \mu F_N \operatorname{sgn}(v_r). \quad (8.36)$$

Während der Haftphase ($v_r = 0$) ist F_R eine Reaktionskraft, die mit der Federkraft im Gleichgewicht steht,

$$F_R = c[x(t) - u(t)], \quad (8.37)$$

vgl. auch (8.35). Sie ist durch

$$|F_R| \leq \mu_0 F_N \quad (8.38)$$

begrenzt, wobei $\mu_0 > \mu$ die Haftreibungszahl bezeichnet.

Bei fehlender Fremderregung ($u_0 = 0$) stellt das System in Abb. 8.17 das klassische Modell eines reibungsselbsterregten Schwingers dar, vgl. [Kau58, Hag82]. Dafür folgt mit $v_r = v_0$ aus (8.35) die Gleichgewichtslage x_s ,

$$x_s = F_R(v_0)/c = \mu F_N/c. \quad (8.39)$$

Diese Gleichgewichtslage ist im Fall einer Reibungskennlinie mit fallender Charakteristik nach Abb. 3.18 instabil. Es ergeben sich selbsterregte Schwingungen, die – wie in Abschn. 3.3.3 beschrieben – nach wenigen Umläufen in der Phasenebene in einen stabilen Grenzzykel einmünden. Dies gilt in gleicher Weise für alle Trajektorien, die innerhalb oder außerhalb des Grenzzykels beginnen. Im vorliegenden Fall einer unstetigen Reibungskennlinie nach Abb. 8.17a erhält man das in Abb. 8.17b dargestellte Phasenportrait. Es zeigt eine grenzstabile Gleichgewichtslage, d. h. im Innern des Grenzzykels existieren geschlossene Phasenkurven, man bezeichnet den Grenzzykel deshalb manchmal auch als Grenzkurve. Trajektorien, die außerhalb des Grenzzykels beginnen, münden jedoch nach wenigen Umläufen in den Grenzzykel ein. Infolge des unstetigen Übergangs von μ_0 nach μ weist der Grenzzykel am Abreißpunkt einen Knick auf; bei einem stetigen Übergang verläuft der Grenzzykel am Abreißpunkt knickfrei, vgl. Abb. 3.19.

Infolge der Fremderregung ($u_0 \neq 0$) liegt ein Schwingungssystem vor, das dem in Abschn. 5.4.6 beschriebenen Beispiel der Van der Polschen Gleichung mit harmonischer Erregung ähnlich ist. Da gleichzeitig Selbst- und Fremderregung vorhanden sind, können Mitnahme- oder Synchronisationseffekte auftreten. Außerdem stellt (8.35) ein System dritter Ordnung der Form (8.11) dar, das prinzipiell chaotisches Verhalten aufweisen kann. Um das zu zeigen, wird für die weiteren Untersuchungen die Zeitnormierung $\tau = \omega_0 t$ mit $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ durchgeführt. Damit folgt aus (8.35) die Gleichung

$$x''(\tau) + x(\tau) = \frac{F_R(v_r)}{c} + u_0 \cos \eta \tau, \quad (8.40)$$

Abb. 8.18 Veranschaulichung der Punktabbildung $P(\varphi_A)$ für den Reibungsschwinger mit Fremderregung

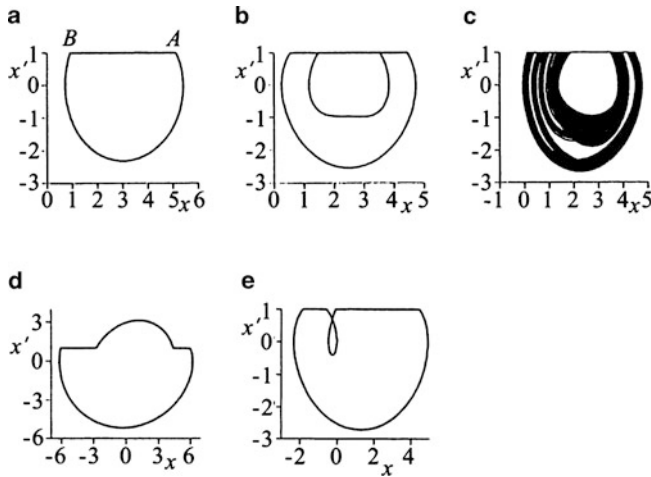
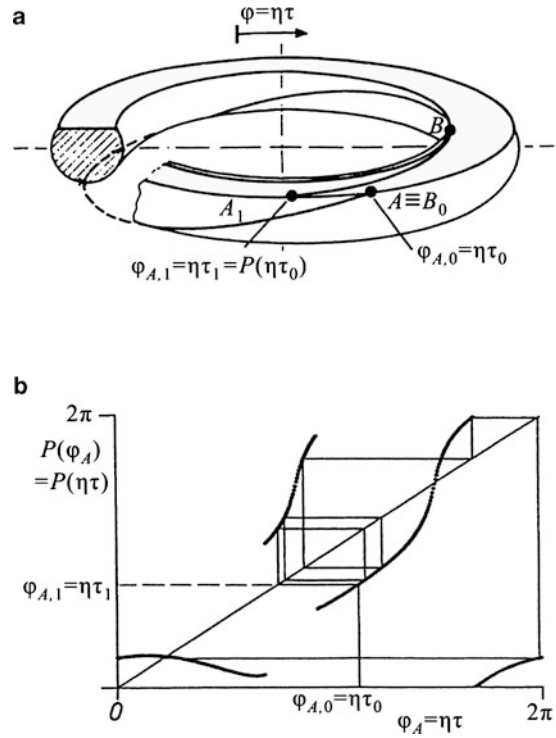


Abb. 8.19 Phasenkurven für **a** $\eta = 0,75$; $F_N/c = 10$; $u_0 = 0,5$; **b** $\eta = 2,15$; $F_N/c = 10$; $u_0 = 0,5$; **c** $\eta = 1,97$; $F_N/c = 10$; $u_0 = 0,5$; **d** $\eta = 0,50$; $F_N/c = 10$; $u_0 = 4,0$; **e** $\eta = 0,41$; $F_N/c = 5$; $u_0 = 2,6$

wobei $\eta = \Omega/\omega_0$, $v_r = v_0 - \omega_0 x'$ gilt. Unter Verwendung der Bezeichnungen $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = \eta\tau$ erhält man daraus unmittelbar das autonome System, vgl. (8.11),

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2, \\ x'_2 &= -x_1 + \frac{F_R(v_r)}{c} + u_0 \cos x_3, \\ x'_3 &= \eta. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Mit der Reibungskennlinie nach Abb. 8.17a lässt sich die Lösung der bereichsweise linearen Bewegungsgleichung für die sich abwechselnden Haft- und Gleitphasen jeweils analytisch angeben. Bezeichnet man den Gleitbeginn (Abreißpunkt von der Haftgeraden) mit A und den Haftbeginn im eingeschwungenen Zustand mit B , vgl. Abb. 8.18a, und beginnt die Betrachtung in der Haftphase, so folgt aus (8.38) mit (8.37) und der Zeitnormierung

$$|x(\tau) - u_0 \cos \eta\tau| < x_0, \quad x_0 = \mu_0 F_N / c. \quad (8.42)$$

In (8.42) gilt das Gleichheitszeichen für den Übergang vom Haften zum Gleiten, also für den Abreißpunkt A . Die entsprechende Amplitude x_A ergibt sich bei Vorgabe eines Erregerwinkels $\varphi_{A,0} \equiv \eta\tau_A \in [0, 2\pi]$ aus

$$|x_A - u_0 \cos \eta\tau_A| = x_0. \quad (8.43)$$

Damit folgen sofort die Schranken

$$x_0 - u_0 \leq x_A \leq x_0 + u_0. \quad (8.44)$$

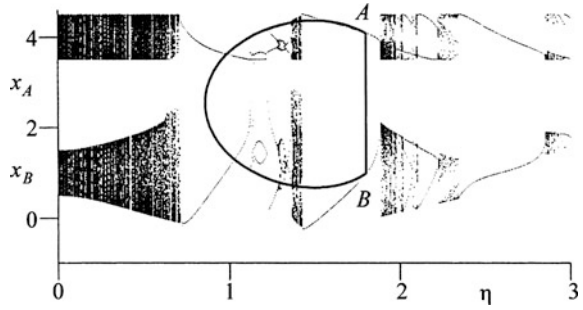
Für das nun einsetzende Gleiten $A \rightarrow B$ lautet die analytische Lösung der Bewegungsgleichung (8.40) mit $F_R/c = \mu F_N/c = x_s$

$$x(\tau) = C \cos(\tau - \varphi_0) + \frac{u_0}{1 - \eta^2} \cos \eta\tau + x_s. \quad (8.45)$$

Darin müssen die Konstanten C und φ_0 aus den Anfangsbedingungen am Abreißpunkt A , $x(\tau_A) = x_A$ und $v_r = 0$ oder $x'(\tau_A) = x'_A = v_0/\omega_0$, bestimmt werden. Das Ende der Gleitphase und damit der Haftbeginn B sind erreicht, wenn für die Ableitung x' der Lösung (8.45) erstmals $x' = v_0/\omega_0$ gilt. Dies ergibt eine implizite Gleichung für die Zeitdauer $\Delta\tau_{AB}$ der Gleitphase. Damit kann aus (8.45) die Verschiebung x_B berechnet werden. Nun haftet die Masse solange am Band und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 , bis die Federkraft das Maximum der Haftreibungskraft erreicht. Aus (8.42) folgt

$$|v_0 \Delta\tau_{BA} - u_0 \cos \eta(\tau_B + \Delta\tau_{BA})| = x_0 - x_B. \quad (8.46)$$

Abb. 8.20 Verzweigungsdiagramm für die Koordinaten x_A, x_B in Abhängigkeit von η ($F_N/c = 10, u_0 = 0,5$)



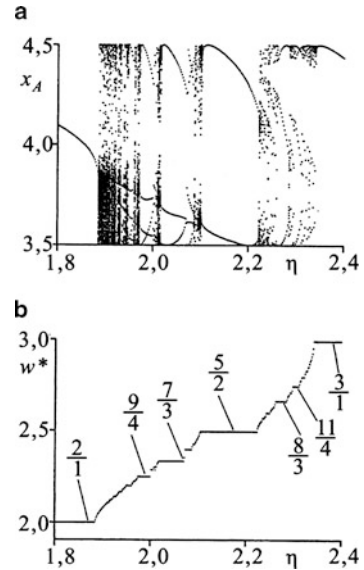
Damit ist die Zeitdauer $\Delta\tau_{BA}$ der Haftphase in impliziter Form gegeben. Die Auslenkung x_A des nächsten Abreißpunktes kann mit dem neuen Erregerwinkel $\varphi_{A,1} \equiv \eta_{TA} = \varphi_{A,0} + \eta(\Delta\tau_{AB} + \Delta\tau_{BA})$ wieder aus (8.43) berechnet werden. Damit liegt eine eindimensionale Punktabbildung

$$\varphi_{A,k+1} = P(\varphi_{A,k}) \pmod{2\pi} \quad (8.47)$$

in Form einer verallgemeinerten Kreisabbildung für den Erregerwinkel vor. Diese Abbildung lässt sich anhand von Abb. 8.18 veranschaulichen. Die Bewegung lässt sich im eingeschwungenen Zustand auf einem Torus darstellen, der infolge der Geschwindigkeitsbeschränkung in der Haftphase abgeplattet ist. Es entstehen zwei Grenzkurven, auf denen die Punkte A und B des Gleit- bzw. Haftbeginns liegen. Beginnt eine Trajektorie z. B. auf der äußeren Grenzkurve bei A_0 unter einem beliebigen Erregerwinkel $\varphi_{A,0} = \eta\tau_0$ kommt sie zum Zeitpunkt τ_1 wieder zu einem Punkt A_1 mit $\varphi_{A,0} = \eta\tau_1 = P(\varphi_{A,0})$ der äußeren Grenzkurve zurück. Durchläuft $\varphi_{A,0}$ die Werte des Intervalls $[0, 2\pi]$ so gibt $\varphi_{A,1} = P(\varphi_{A,0}) \pmod{2\pi}$ die Abbildung des Ankunftszeitpunktes A_1 in Abhängigkeit des Startpunktes A_0 an. Damit wird das $\varphi_{A,0}$ -Intervall $[0, 2\pi]$ auf das $\varphi_{A,1}$ -Intervall $[0, 2\pi]$ abgebildet. Abhängig von φ_A lassen sich auch die Koordinaten x_A, x_B der Punkte A und B berechnen. Im Gegensatz zur logistischen Abbildung liegt keine explizite, sondern eine implizite Abbildung vor, die außerdem Unstetigkeiten aufweisen kann, vgl. Abb. 8.18b und [PHO96]. Hat man jedoch die Abbildung einmal berechnet, so kann die weitere Analyse wie bei der logistischen Abbildung erfolgen.

Die wichtigsten Systemparameter sind $\eta, F_N/c$ und u_0 , außerdem sind $\mu = 0,25$ und $\mu_0 = 0,4$ durch die Reibungskennlinie festgelegt. In Abhängigkeit dieser Parameter lässt sich nun das Systemverhalten analysieren. Abb. 8.19a bis e zeigt unterschiedliche ausgewählte Phasenkurven. Man erkennt a) einperiodische, b) zweiperiodische und c) chaotische Lösungen. Für große Erregeramplituden u_0 kann der Haftbereich unterbrochen werden, vgl. Abb. 8.19d und e. Wir beschränken uns im folgenden auf kleine Erregeramplituden, bei denen keine Unterbrechungen im Haftbereich auftreten. In Abb. 8.20 ist das Verzweigungsdiagramm für die Koordinaten x_A, x_B der Punkte A und B in Abhängigkeit vom Frequenz Verhältnis η dargestellt. Man erkennt unterschiedliche reguläre und irregu-

Abb. 8.21 **a** Verzweigungsdiagramm ($F_N/c = 10$; $u_0 = 0,5$), **b** zugehörige Windungszahlen



läre Lösungen. Die Ausschnittsvergrößerung Abb. 8.21a verdeutlicht die verschiedenen Lösungstypen im Verzweigungsdiagramm. Abb. 8.21b zeigt die zugehörigen Windungszahlen gemäß Definition (8.16). Sie kennzeichnen das Verhältnis von Erregerfrequenz zu Antwortfrequenz. Die Windungszahlen bilden eine so genannte *Teufelstreppe* mit unendlich vielen Stufen, bei der sich rationale und irrationale Werte mit entsprechenden periodischen bzw. quasiperiodischen Lösungen abwechseln. Die Abschnitte mit rationalen Windungszahlen können als Mitnahmebereiche angesehen werden. Den beiden einperiodischen Lösungen an den Rändern des Parameterbereiches sind deutlich unterschiedliche Erregerperioden zugeordnet. Die Ergebnisse der Verzweigungsdiagramme lassen sich in den Parameterkarten Abb. 8.22 zusammenfassen, in der die Periodizität der Lösung als Graustufe über zwei Verzweigungsparametern dargestellt ist. Bei Abb. 8.22a treten in den dunklen Bereichen hochperiodische bzw. chaotische Lösungen auf. Abb. 8.22b zeigt so genannte *Arnold-Zungen*. Dies sind Mitnahmebereiche, die mit wachsender Erregeramplitude zunehmen. Bei großen Erregeramplituden treten Überlappungen der Zungen auf, in denen chaotische Lösungen vorkommen können. Bei kleinen Erregeramplituden treten hingegen nur periodische oder quasiperiodische Lösungen auf.

Als typische Wege ins Chaos findet man beim Reibungsschwinger mit Fremderregung abhängig von den Systemparametern sowohl Periodenverdopplung, vgl. Abb. 8.23, als auch Intermittenz, vgl. Abb. 8.24. Die Periodenverdopplung erfolgt ausgehend von höherperiodischen Lösungen. Sie tritt auf, wenn für die Steigung in den Fixpunkten der entsprechenden Iterierten $f' = -1$ gilt; dann beträgt der Ljapunov-Exponent $\Lambda = 0$. Intermittenz resultiert aus einer Sattelpunktverzweigung, bei der ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt miteinander verschmelzen.

Abb. 8.22 Parameterkarten
für **a** $u_0 = 0,5$, **b** $F_N/c = 10$

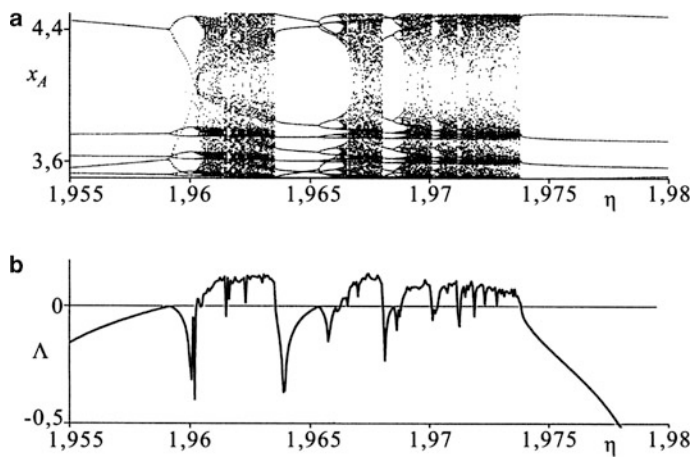
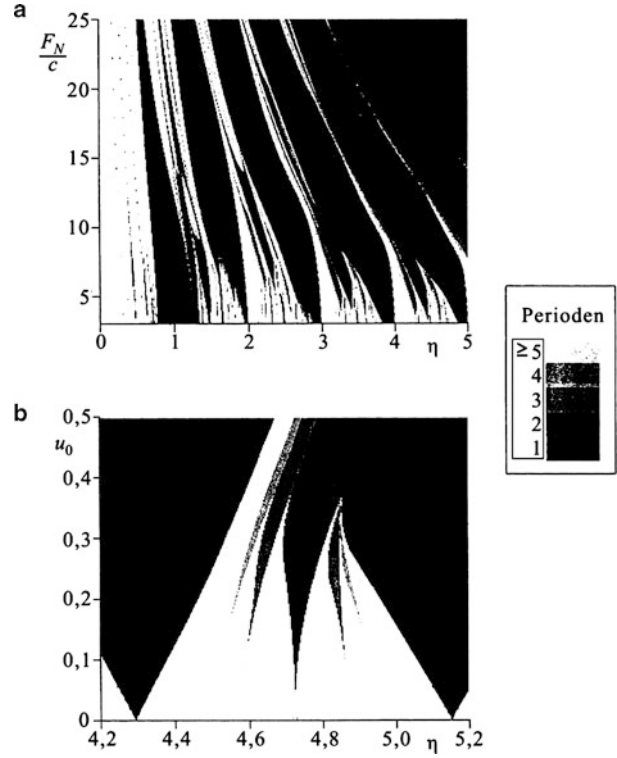


Abb. 8.23 Periodenverdopplung: **a** Verzweigungsdiagramm, **b** zugehörige Ljapunov-Exponenten
($F_N/c = 10, u_0 = 0,5$)

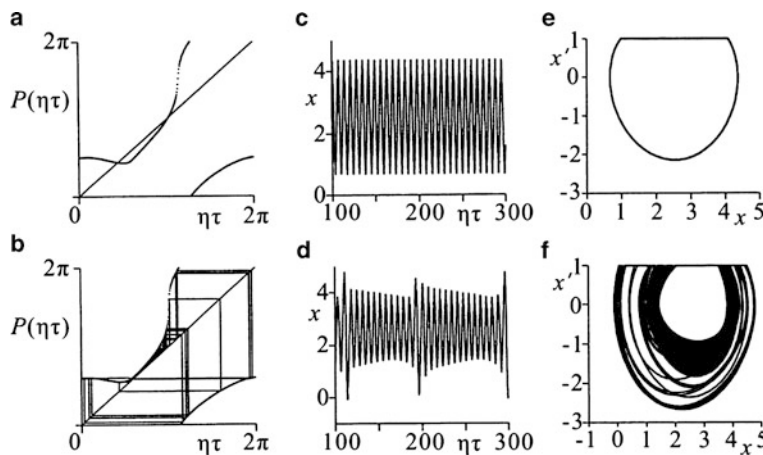
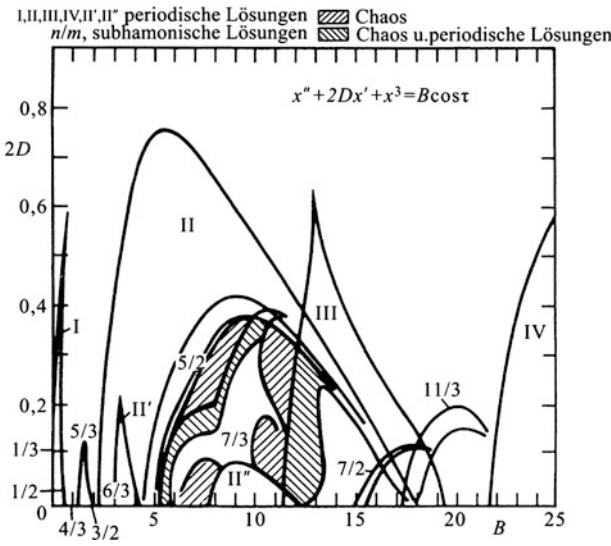


Abb. 8.24 Intermittenz: obere Reihe $\eta = 1,8$, untere Reihe $\eta = 1,9$, **a** und **b** Punkt-Abbildung, **c**, **d** Auslenkung x in Abhängigkeit von der Zeit, **e**, **f** zugehörige Phasenkurven ($F_N/c = 10$, $u_0 = 0,5$)

Abb. 8.25 Parameterkarte für die verkürzte Duffing-Gleichung, nach [Ued80]



In Abb. 8.24d erkennt man deutlich die scheinbar regulären Phasen im Zeitverlauf der Lösung, die von plötzlichen Ausbrüchen (bursts) unterbrochen werden.

Insgesamt ist festzuhalten, dass der sehr robuste Grenzzykel bei reiner Reibungsselbst-erregung durch eine zusätzliche Fremderregung aufgebrochen werden kann. Es stellt sich unterschiedliches Verzweigungsverhalten mit periodischen, quasiperiodischen und chaotischen Lösungen ein. Das prinzipielle Verhalten des Reibungsschwingers mit einer Kenn-

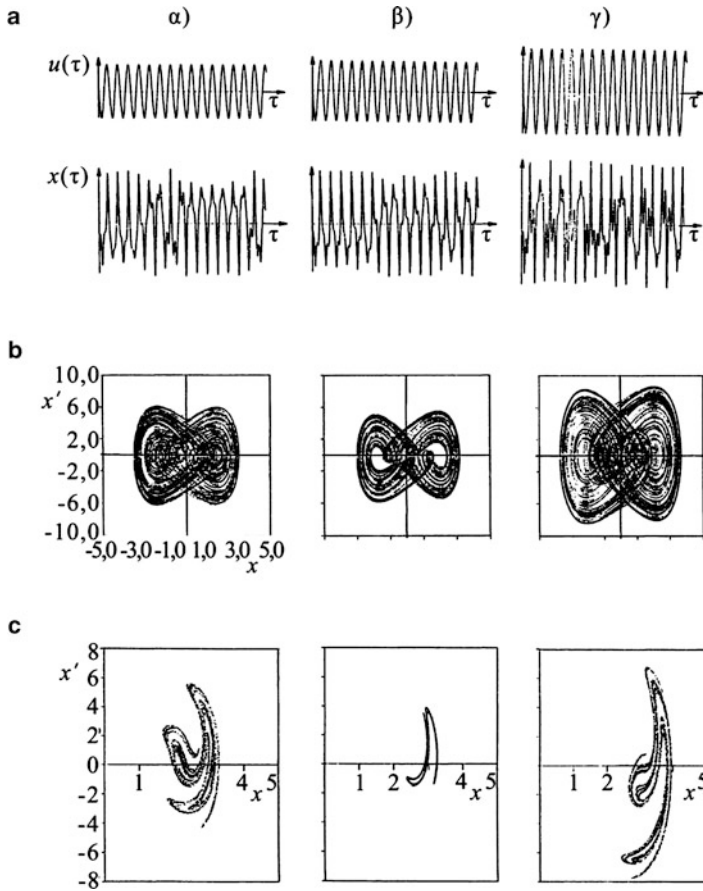


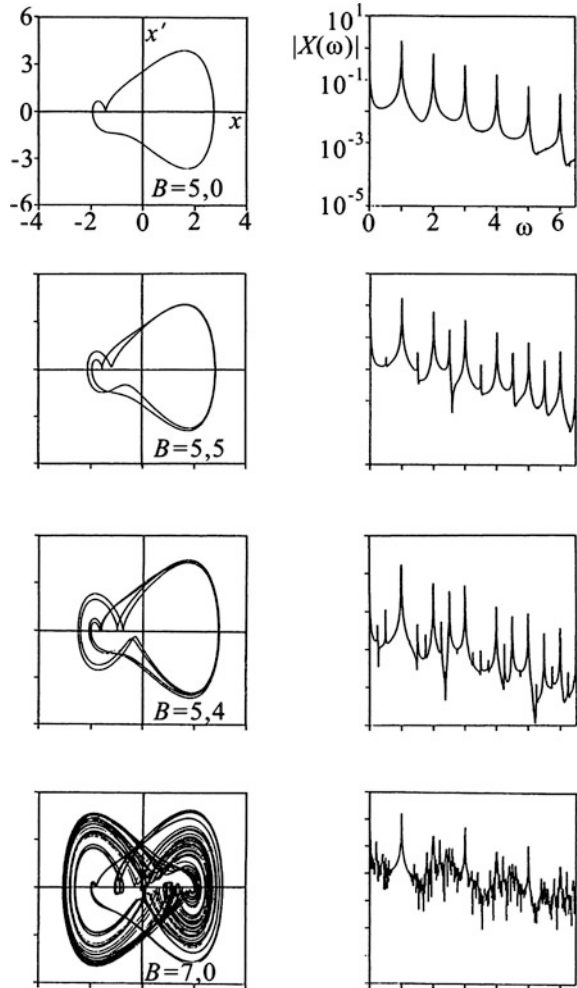
Abb. 8.26 Chaotische Bewegungen für die Parameter α) $D = 0,025$; $B = 7,50$; β) $D = 0,125$; $B = 8,50$; γ) $D = 0,05$; $B = 12,0$. Darstellungsformen: **a** Erregung $u(\tau) = B \cos \tau$ und Antwort $x(\tau)$, **b**) Phasenkurven, **c** Poincaré-Abbildungen

linie nach Abb. 8.17a zeigt sich auch bei einer Kennlinie nach Abb. 3.18, vgl. dazu [PHO96].

8.3.2 Der Duffing-Schwinger

Eine Reihe technischer Probleme führt auf die *Duffingsche* Differentialgleichung (5.117) als Bewegungsgleichung Entsprechend zahlreich sind die analytischen und numerischen Untersuchungen dieser Gleichung, vgl. z. B. [GH02, Kre87]. Hervorzuheben sind die experimentellen Untersuchungen von [Moo04], an einer einseitig fest eingespannten dünnen Blattfeder, deren freies Ende mittig zwischen zwei gleich gepolten Permanentmagneten

Abb. 8.27 Periodenverdopp-
lung als Weg ins Chaos für
 $D = 0,1$. Darstellung der Pha-
senkurven und zugehörigen
Fourier-Transformierten



liegt und sich infolge der Magnetkräfte verbiegt. Bei harmonischen Querbewegungen der gesamten Anordnung genügen die Amplituden der Grundswingungsform näherungsweise einer Duffingschen Differentialgleichung. Bei Veränderung der Erregeramplitude und Erregerfrequenz lässt sich die Grenze zwischen chaotischen und periodischen Bewegungen experimentell bestimmen. Diese Grenze kann auch numerisch mit der in Abschn. 8.2.2 angegebenen Grenze für das Auftreten homokliner Punkte nach Melnikov abgeschätzt werden.

Umfangreiche analoge und digitale Simulationen wurden von Ueda [Ued80], an der Duffingschen Differentialgleichung ohne linearen Rückstellterm

$$x'' + 2Dx' + x^3 = B \cos \tau = u(\tau) \quad (8.48)$$

vorgenommen. Der Vorteil dieser verkürzten Duffing-Gleichung ist das Auftreten von nur zwei Systemparametern, der Erregeramplitude B und dem Dämpfungsgrad D . In Abhängigkeit dieser Größen wurde von Ueda [Ued80] eine Parameterkarte ermittelt, vgl. Abb. 8.25, aus der a) Bereiche mit chaotischen Bewegungen oder b) Bereiche mit chaotischem und regulärem Verhalten – je nach Wahl der Anfangsbedingungen – hervorgehen. Für ausgewählte Parameter findet man in Abb. 8.26a bis c das der Erregung $B \cos \tau$ zugeordnete Antwortsignal $x(\tau)$ sowie die Phasenkurven (Abb. 8.26b) und die Poincaré-Abbildungen (Abb. 8.26c) für chaotische Bewegungen. Man erkennt: die Zeitverläufe chaotischer Bewegungen sind irregulär oszillierend, die entsprechenden Phasenkurven sind vielfältig verschlungen und die zugeordneten Poincaré-Abbildungen stellen eine strukturierte Punktwolke dar. Als typischer Weg ins Chaos tritt Periodenverdopplung auf, wie dies in Abb. 8.27 für $D = 0,1$ und verschiedene Werte von B aus den entsprechenden Phasenkurven und Spektren zu erkennen ist. Im Fall chaotischer Bewegungen weisen die Spektren kontinuierliche Anteile und Linien der hauptsächlich vorkommenden periodischen Anteile auf. Die verschiedenen Darstellungen demonstrieren gleichzeitig die Möglichkeiten der numerischen Simulation zum Erkennen chaotischer Bewegungen. Eine detaillierte Analyse der Duffingschen Differentialgleichung findet sich in [BGU08].

Literatur

- [AMJ08] Abraham, R., Marsden, E. Jerrold.: Foundations of Mechanics. 2. Aufl. American Mathematical Society (2008)
- [Bel95] Beleckij, V.V.: Reguläre und chaotische Bewegung starrer Körper. Teubner Verlag, Stuttgart (1995)
- [BGU08] Bonatto, C., Gallas, J.A.C., Ueda, Y.: Chaotic phase similarities and recurrences in a damped-driven Duffing oscillator. *Physical Review* **E77**, 026217 (2008)
- [CoT78] Coulet, P., Tresser, C.: Iterations d'endomorphismes et groupe de renormalisation, *J. Phys. Colloque* **C 539**, C5–25 (1978)
- [Fei78] Feigenbaum, M.J.: Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics* **19**(1), 25–52 (1978)
- [GH02] Guckenheimer, J., Holmes, P.: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag, Berlin (2002)
- [GPL90] Geist, K., Parlitz, U., Lauterborn, W.: Comparison of Different Methods for Computing. Lyapunov Exponents, *Progress of Theoretical Physics* **83**(5), 875–893 (1990)
- [Hag82] Hagedorn, P.: Nichtlineare Schwingungen. Koch Buchverlag, Planegg (1982)
- [LKP94] Leven, R.W., Koch, B.-P., Pompe, B.: Chaos in dissipativen Systemen. 2. Aufl. Akademie-Verlag, Berlin (1994)
- [Kau58] Kauderer, H.: Nichtlineare Mechanik. Springer-Verlag, Berlin (1958)
- [Kre87] Kreuzer, E.: Numerische Untersuchung nicht linearer dynamischer Systeme. Springer-Verlag, Berlin (1987)
- [Moo04] Moon, F.C.: Chaotic and Fractal Dynamics. WILEY-VCH Verlag (2004)

- [PHO96] Popp, K., Hinrichs, N., Oestreich, M.: Analysis of a Self Excited Friction Oscillator with external Excitation. In: Guran, A., Pfeiffer, F., Popp, K. (Hrsg.) Dynamics with Friction, Part I, S. 1–35, World Scientific, Singapore (1996)
- [Pon57] Poincaré, H.: Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste (3 Volumes). Dover Verlag (1957)
- [StK89] Steeb, W.H., Kunick, A.: Chaos in deterministischen Systemen. 2. Aufl. BI-Wiss.-Verlag, Mannheim (1989)
- [Tro82] Troger, H.: Über chaotisches Verhalten einfacher mechanischer Systeme. ZAMM **62**, T18–T27 (1982)
- [TS02] Thompson, J.M.T., Stewart, H.B.: Nonlinear Dynamics and Chaos. John Wiley (2002)
- [Ued80] Ueda, Y.: Steady motions exhibited by Duffing's equation – A picture book of regular and chaotic motions. In: Holmes, P. (Hrsg.) Engineering Foundation: New Approaches to nonlinear problems in dynamics. Asilomer Conference Grounds, Pacific Grove, California, 9.–14. Dezember 1979, S. 311–322, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1980)

Schwingungen

Grundlagen – Modelle – Beispiele

Magnus, K.; Popp, K.; Sextro, W.

2021, XII, 285 S. 171 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-31115-5